1

解答解説のページへ

$a,\ b$ は実数で $a>b>0$ とする。区間 $0 \leqq x \leqq 1$ で定義される関数 $f(x)$ を次のように定める。

$$f(x)=\log\left(ax+b(1-x)\right)-x\log a-(1-x)\log b$$

ただし, log は自然対数を表す。このとき, 以下のことを示せ。

(1)　$0<x<1$ に対して $f''(x)<0$ が成り立つ。

(2)　$f'(c)=0$ を満たす実数 c が, $0<c<1$ の範囲にただ 1 つ存在する。

(3)　$0 \leqq x \leqq 1$ を満たす実数 x に対して, $ax+b(1-x) \geqq a^x b^{1-x}$ が成り立つ。

2

解答解説のページへ

$f(x)=x^3-3x+1$，$g(x)=x^2-2$ とし，方程式 $f(x)=0$ について考える。このとき，以下のことを示せ。

(1)　$f(x)=0$ は絶対値が 2 より小さい 3 つの相異なる実数解をもつ。

(2)　α が $f(x)=0$ の解ならば，$g(\alpha)$ も $f(x)=0$ の解となる。

(3)　$f(x)=0$ の解を小さい順に α_1，α_2，α_3 とすれば,

$$g(\alpha_1)=\alpha_3,\ g(\alpha_2)=\alpha_1,\ g(\alpha_3)=\alpha_2$$

となる。

3

解答解説のページへ

a を $0 \leqq a < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲にある実数とする。2 つの直線 $x = 0$，$x = \dfrac{\pi}{2}$ および 2 つの曲線 $y = \cos(x - a)$，$y = -\cos x$ によって囲まれる図形を G とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 図形 G の面積を S とする。S を a を用いた式で表せ。

(2) a が $0 \leqq a < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，S を最大にするような a の値と，そのときの S の値を求めよ。

(3) 図形 G を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を V とする。V を a を用いた式で表せ。

4

解答解説のページへ

大小 2 つのサイコロを同時に 1 回投げて，大きいサイコロの出た目の数 A，および小さいサイコロの出た目の数 B に応じて得点を競うゲームを考える。ただし，このゲームには 6 種類の得点 X_n $(1 \leqq n \leqq 6)$ があって，それぞれ，次の規則で定められているとする。

$$X_n = \begin{cases} A & (A \geqq n\text{のとき}) \\ B & (A < n\text{かつ}A \neq B\text{のとき}) \\ aA+b & (A < n\text{かつ}A = B\text{のとき}) \end{cases}$$

ここで，a，b は実数の定数である。また，得点 X_n の期待値を E_n とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) A，B のとり得る値に対する得点 X_3 および X_4 の値を，答案用紙の表にそれぞれ記入せよ。

(2) $E_4 - E_3$ を求めよ。

(3) $E_1 = E_2 = \cdots = E_6$ となるような a，b はあるか。あれば求めよ。なければ，そのことを示せ。

5

解答解説のページへ

t を実数として，数列 a_1，a_2，…を

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2t,\ a_{n+1} = 2ta_n - a_{n-1} \quad (n \geqq 2)$$

で定める。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $t \geqq 1$ ならば，$0 < a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ となることを示せ。

(2) $t \leqq -1$ ならば，$0 < |a_1| < |a_2| < |a_3| < \cdots$ となることを示せ。

(3) $-1 < t < 1$ ならば，$t = \cos\theta$ となる θ を用いて，

$$a_n = \frac{\sin n\theta}{\sin\theta} \quad (n \geqq 1)$$

となることを示せ。

$\boxed{1}$

問題のページへ

(1)　$f(x)=\log(ax+b(1-x))-x\log a-(1-x)\log b$ に対して,

$$f'(x)=\frac{a-b}{ax+b(1-x)}-\log a+\log b,\ f''(x)=-\frac{(a-b)^2}{\{ax+b(1-x)\}^2}$$

$a>b>0$ から, $0<x<1$ において $f''(x)<0$ となる。

(2)　まず, $t>0$ のとき，$g(t)=t-1-\log t$ とおくと,

$$g'(t)=1-\frac{1}{t}=\frac{t-1}{t}$$

すると，$g(t)$ の増減は右表のようになる。

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$
$g(t)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

さて, (1)より，$f'(0)=\dfrac{a-b}{b}-\log a+\log b=\dfrac{a}{b}-1-\log\dfrac{a}{b}=g\left(\dfrac{a}{b}\right)$

$$f'(1)=\frac{a-b}{a}-\log a+\log b=1-\frac{b}{a}+\log\frac{b}{a}=-g\left(\frac{b}{a}\right)$$

ここで, $a>b>0$ から，$\dfrac{a}{b}>1$，$0<\dfrac{b}{a}<1$ から，$f'(0)>0$，$f'(1)<0$

さらに, (1)から, $0<x<1$ で $f'(x)$ は単調減少であるので，$f'(c)=0$ を満たす実数 c は, $0<c<1$ の範囲にただ 1 つ存在することになる。

(3)　(2)より，$f(x)$ の増減は右表のようになる。

また，$f(0)=f(1)=0$ から，$0\leqq x\leqq 1$ において, $f(x)\geqq 0$ となり,

x	0	$\cdots$	c	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$$\log(ax+b(1-x))\geqq x\log a+(1-x)\log b$$

$$\log(ax+b(1-x))\geqq \log a^x b^{1-x}$$

よって，$ax+b(1-x)\geqq a^x b^{1-x}$ が成り立つ。

［解 説］

曲線 $y=\log x$ が上に凸であることを題材としています。(2)で，平均値の定理を直接的に利用しないときは，上のような解になります。

2

問題のページへ

(1)　$f(x)=x^3-3x+1$ に対して，

$$f'(x)=3x^2-3$$
$$=3(x-1)(x+1)$$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3

すると，$-2\leqq x\leqq 2$ における $f(x)$ の増減は右表のようになり，方程式 $f(x)=0$ の実数解は，$-2<x<-1$，$-1<x<1$，$1<x<2$ に 1 つずつある。

すなわち，$f(x)=0$ は，絶対値が 2 より小さい 3 つの相異なる実数解をもつ。

(2)　α は $f(x)=0$ の解なので，$\alpha^3-3\alpha+1=0$ から，$\alpha^3=3\alpha-1$ ………(＊)

また，$g(x)=x^2-2$ から，$g(\alpha)=\alpha^2-2$ となり, (＊)より,

$$f(g(\alpha))=f(\alpha^2-2)=(\alpha^2-2)^3-3(\alpha^2-2)+1=\alpha^6-6\alpha^4+9\alpha^2-1$$
$$=(3\alpha-1)^2-6\alpha(3\alpha-1)+9\alpha^2-1$$
$$=9\alpha^2-6\alpha+1-18\alpha^2+6\alpha+9\alpha^2-1=0$$

よって，$g(\alpha)$ も $f(x)=0$ の解である。

(3)　$f(-\sqrt{3})=f(0)=f(\sqrt{3})=1$ より，$f(x)=0$ の解を α_1，α_2，α_3（$\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3$）としたとき,

$$-2<\alpha_1<-\sqrt{3},\ 0<\alpha_2<1,\ 1<\alpha_3<\sqrt{3}$$

すると，$g(x)=x^2-2$ より，

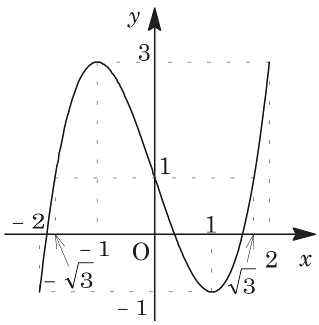
$$1<g(\alpha_1)<2,\ -2<g(\alpha_2)<-1,\ -1<g(\alpha_3)<1$$

よって，$g(\alpha_2)<g(\alpha_3)<g(\alpha_1)$ となる。

また, (2)から，$g(\alpha_1)$，$g(\alpha_2)$，$g(\alpha_3)$ も $f(x)=0$ の解であることより,

$$\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\}=\{g(\alpha_1),\ g(\alpha_2),\ g(\alpha_3)\}$$

以上より，$g(\alpha_1)=\alpha_3$，$g(\alpha_2)=\alpha_1$，$g(\alpha_3)=\alpha_2$ である。



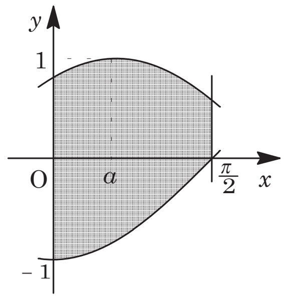
［解 説］

グラフの概形から考えると, (3)での $x=\pm\sqrt{3}$ を用いた解のとりうる範囲の評価は, 難しくはないでしょう。なお, 記憶をたどって調べたところ, 1997 年に早大・理工で本問と同じ問題が出ています。

3

問題のページへ

(1)　2 直線 $x=0$ と $x=\dfrac{\pi}{2}$，2 曲線 $y=\cos(x-a)$ と $y=-\cos x$ によって囲まれる図形 G の面積 S は,



$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{\cos(x-a)+\cos x\}dx$$

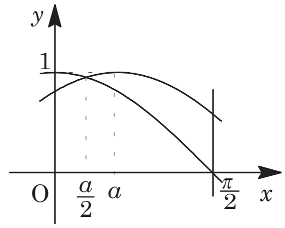
$$=\Big[\sin(x-a)+\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\sin\Big(\frac{\pi}{2}-a\Big)-\sin(-a)+1=\cos a+\sin a+1$$

(2)　(1)から，$S=\sqrt{2}\sin\Big(a+\dfrac{\pi}{4}\Big)+1$

そこで，$0\leqq a<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\dfrac{\pi}{4}\leqq a+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{3\pi}{4}$ から，$a+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$ すなわち $a=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，S は最大値 $\sqrt{2}+1$ をとる。

(3)　まず，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において，曲線 $y=-\cos x$ を x 軸に関して折り返し, x 軸の上側に対称移動すると，曲線 $y=\cos x$ となる。そして，$0<a<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，2 曲線 $y=\cos(x-a)$，$y=\cos x$ の交点は,



$$\cos(x-a)=\cos x\,,\ \ x-a=-x\,,\ \ x=\frac{a}{2}$$

図形 G を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体は，$0\leqq x\leqq\dfrac{a}{2}$ では $y=\cos x$，$\dfrac{a}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ では $y=\cos(x-a)$ を 1 回転させたものに等しく，その体積 V は,

$$V=\pi\int_0^{\frac{a}{2}}\cos^2x\,dx+\pi\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(x-a)\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{a}{2}}(1+\cos 2x)\,dx+\frac{\pi}{2}\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\{1+\cos 2(x-a)\}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx+\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{a}{2}}\cos 2x\,dx+\frac{\pi}{2}\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2(x-a)\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\Big[\frac{\sin 2x}{2}\Big]_0^{\frac{a}{2}}+\frac{\pi}{2}\Big[\frac{\sin 2(x-a)}{2}\Big]_{\frac{a}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi}{4}\sin a+\frac{\pi}{4}\sin(\pi-2a)-\frac{\pi}{4}\sin(-a)=\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi}{2}\sin a+\frac{\pi}{4}\sin 2a$$

なお，この式は $a=0$ のときも成立する。

［解 説］

(3)でも利用したように，回転体の体積を求めるとき，回転軸の一方の側に曲線を対称移動してまとめると，ミスが少なくなります。

4

問題のページへ

(1)　得点 X_3 の表は左側，X_4 の表は右側のようになる。

A＼B	1	2	3	4	5	6
1	$a+b$	2	3	4	5	6
2	1	$2a+b$	3	4	5	6
3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6

A＼B	1	2	3	4	5	6
1	$a+b$	2	3	4	5	6
2	1	$2a+b$	3	4	5	6
3	1	2	$3a+b$	4	5	6
4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6

(2)　X_3 の表と X_4 の表は，$A=3$ の行のみ値が異なっていることより，

$$E_4-E_3=\frac{1}{36}(1+2+3a+b+4+5+6)-\frac{1}{36}(3\times6)=\frac{3a+b}{36}\cdots\cdots\cdots①$$

(3)　(2)と同様に，X_2 の表と X_3 の表は，$A=2$ の行のみ値が異なっていることより，

$$E_3-E_2=\frac{1}{36}(1+2a+b+3+4+5+6)-\frac{1}{36}(2\times6)=\frac{2a+b+7}{36}\cdots\cdots\cdots②$$

X_1 の表と X_2 の表は，$A=1$ の行のみ値が異なっていることより，

$$E_2-E_1=\frac{1}{36}(a+b+2+3+4+5+6)-\frac{1}{36}(1\times6)=\frac{a+b+14}{36}\cdots\cdots\cdots③$$

また，X_4 の表と X_5 の表は，$A=4$ の行のみ値が異なっていることより，

$$E_5-E_4=\frac{1}{36}(1+2+3+4a+b+5+6)-\frac{1}{36}(4\times6)=\frac{4a+b-7}{36}\cdots\cdots\cdots④$$

X_5 の表と X_6 の表は，$A=5$ の行のみ値が異なっていることより，

$$E_6-E_5=\frac{1}{36}(1+2+3+4+5a+b+6)-\frac{1}{36}(5\times6)=\frac{5a+b-14}{36}\cdots\cdots\cdots⑤$$

ここで，条件より，$E_1=E_2=E_3=E_4=E_5=E_6$ より，

$$E_2-E_1=0,\ E_3-E_2=0,\ E_4-E_3=0,\ E_5-E_4=0,\ E_6-E_5=0$$

①～⑤より，$3a+b=0$ ……⑥，$2a+b+7=0$ ……⑦

$a+b+14=0$ ……⑧，$4a+b-7=0$ ……⑨，$5a+b-14=0$ ……⑩

⑥⑦より，$a=7$，$b=-21$ となり，この値は⑧⑨⑩をすべて満たす。

よって，$E_1=E_2=\cdots=E_6$ となる a, b は存在し，$a=7$，$b=-21$ である。

［解 説］

(3)での a，b の値は，E_4-E_3 と E_3-E_2 だけから求まります。その後，十分性を確認する方法もありますが，残りが 3 つの場合しかないので，これらを調べるという直接的な方法を採用しました。

5

問題のページへ

(1)　$t \geqq 1$ のとき, $0 < a_n < a_{n+1}$ $(n \geqq 1)$ であることを数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1,\ 2$ のとき

条件より, $a_1=1$, $a_2=2t \geqq 2$ なので, $0 < a_1 < a_2$ が成り立つ。

(ii)　$n=k,\ k+1$ のとき

$0 < a_k < a_{k+1}$ の成立を仮定すると, 条件より,

$$a_{k+2}-a_{k+1}=(2t-1)a_{k+1}-a_k \geqq a_{k+1}-a_k > 0$$

よって, $0 < a_{k+1} < a_{k+2}$ が成り立つ。

(i)(ii)より, 自然数 n に対し, $t \geqq 1$ のとき, $0 < a_n < a_{n+1}$ が成り立つ。

(2)　$t \leqq -1$ のとき, $0 < |a_n| < |a_{n+1}|$ $(n \geqq 1)$ であることを数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1,\ 2$ のとき

条件より, $|a_1|=1$, $|a_2|=2|t| \geqq 2$ なので, $0 < |a_1| < |a_2|$ が成り立つ。

(ii)　$n=k,\ k+1$ のとき

$0 < |a_k| < |a_{k+1}|$ の成立を仮定すると, 条件より,

$$|a_{k+2}|=|2ta_{k+1}-a_k| \geqq |2ta_{k+1}|-|a_k|=2|t||a_{k+1}|-|a_k|$$

すると, $|a_{k+2}|-|a_{k+1}| \geqq (2|t|-1)|a_{k+1}|-|a_k| \geqq |a_{k+1}|-|a_k| > 0$

よって, $0 < |a_{k+1}| < |a_{k+2}|$ が成り立つ。

(i)(ii)より, 自然数 n に対し, $t \leqq -1$ のとき, $0 < |a_n| < |a_{n+1}|$ が成り立つ。

(3)　$-1 < t < 1$ のとき, $t=\cos\theta$ となる θ を用いて, $a_n=\dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta}$ $(n \geqq 1)$ であることを数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1,\ 2$ のとき

$a_1=1=\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta}$, $a_2=2t=2\cos\theta=\dfrac{\sin 2\theta}{\sin\theta}$ となり, 成立する。

(ii)　$n=k,\ k+1$ のとき

$a_k=\dfrac{\sin k\theta}{\sin\theta}$, $a_{k+1}=\dfrac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}$ であると仮定すると, 条件より,

$$a_{k+2}=2t\frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin k\theta}{\sin\theta}=\frac{2\sin(k+1)\theta\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin k\theta}{\sin\theta}$$
$$=\frac{\sin(k+2)\theta+\sin k\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin k\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin(k+2)\theta}{\sin\theta}$$

(i)(ii)より, 自然数 n に対し, $-1 < t < 1$ $(t=\cos\theta)$ のとき, $a_n=\dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta}$ が成り立つ。

[解 説]

3 題とも数学的帰納法でクリアーに示せます。なお, (1)を参考にして(2)では三角不等式を用いましたが, 漸化式では, 1999 年に東大・理で利用して以来, 久々です。