1

解答解説のページへ

実数 a, b に対して, $f(x)=a(x-b)^2$ とおく。ただし, a は正とする。放物線 $y=f(x)$ が直線 $y=-4x+4$ に接している。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) b を a を用いて表せ。

(2) $0\leqq x\leqq 2$ において, $f(x)$ の最大値 $M(a)$ と, 最小値 $m(a)$ を求めよ。

(3) a が正の実数を動くとき, $M(a)$ の最小値を求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

空間内に 4 点 O, A, B, C があり,

$$\mathrm{OA}=3,\ \mathrm{OB}=\mathrm{OC}=4,\ \angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=\angle\mathrm{AOB}=\frac{\pi}{3}$$

であるとする。3 点 A, B, C を通る平面に垂線 OH を下ろす。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とし, $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$ と表すとき, r, s, t を求めよ。

(2) 直線 CH と直線 AB の交点を D とするとき, 長さの比 CH : HD, AD : DB をそれぞれ求めよ。

3

解答解説のページへ

a, b を自然数とする。以下の問いに答えよ。

(1) ab が 3 の倍数であるとき, a または b は 3 の倍数であることを示せ。

(2) $a+b$ と ab がともに 3 の倍数であるとき, a と b はともに 3 の倍数であることを示せ。

(3) $a+b$ と a^2+b^2 がともに 3 の倍数であるとき, a と b はともに 3 の倍数であることを示せ。

1

問題のページへ

(1)　$f(x)=a(x-b)^2$ に対して，$y=f(x)$ と $y=-4x+4$ を連立して，

$$a(x-b)^2=-4x+4,\ \ ax^2-2(ab-2)x+ab^2-4=0\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

条件より，(＊)が重解をもつので，

$$D/4=(ab-2)^2-a(ab^2-4)=0,\ \ ab-a-1=0$$

$a>0$ より，$b=\dfrac{a+1}{a}$

(2)　(1)より，$f(x)=a\left(x-\dfrac{a+1}{a}\right)^2$ となり，$a>0$ から，$\dfrac{a+1}{a}=1+\dfrac{1}{a}>1$ である。

すると，$0\leqq x\leqq 2$ における $f(x)$ の最大値 $M(a)$，最小値 $m(a)$ は，

(i)　$1+\dfrac{1}{a}\leqq 2$ $(a\geqq 1)$ のとき

$$M(a)=f(0)=\frac{(a+1)^2}{a},\ \ m(a)=f\left(\frac{a+1}{a}\right)=0$$

(ii)　$1+\dfrac{1}{a}>2$ $(0<a<1)$ のとき

$$M(a)=f(0)=\frac{(a+1)^2}{a},\ \ m(a)=f(2)=a\left(2-\frac{a+1}{a}\right)^2=\frac{(a-1)^2}{a}$$

(3)　(2)より，$M(a)=\dfrac{(a+1)^2}{a}=a+\dfrac{1}{a}+2\geqq 2+2=4$

等号が成立するのは，$a=\dfrac{1}{a}$ すなわち $a=1$ のときである。

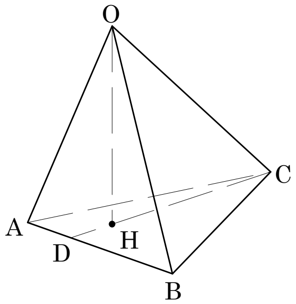
したがって，$M(a)$ の最小値は 4 である。

［解　説］

2 次関数の最大・最小に関する基本問題です。

2

問題のページへ



(1)　条件より，$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=|\vec{c}|=4$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=3\cdot 4\cos\frac{\pi}{3}=6,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=4\cdot 4\cos\frac{\pi}{3}=8$$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$ とするとき，H は平面 ABC 上にあるので，

$$r+s+t=1\ \cdots\cdots\cdots①$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}=0$ より，$(r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$

$$r(3^2-6)+s(6-4^2)+t(6-8)=0$$

$$3r-10s-2t=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=0$ より，$(r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c})\cdot(\vec{a}-\vec{c})=0$

$$r(3^2-6)+s(6-8)+t(6-4^2)=0,\ 3r-2s-10t=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

①②より $13s+5t=3$，②③より $s=t$ となるので，$s=t=\dfrac{1}{6}$

①から，$r=1-\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{2}{3}$

(2)　(1)より，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}+\dfrac{1}{6}\vec{c}$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}-\vec{c}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}-\frac{5}{6}\vec{c}=\frac{2}{3}(\vec{a}-\vec{c})+\frac{1}{6}(\vec{b}-\vec{c})$$

$$=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\frac{4\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}}}{6}=\frac{5}{6}\cdot\frac{4\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}}}{5}\ \cdots\cdots\cdots④$$

ここで，直線 CH と直線 AB の交点が D より，④から，

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\frac{4\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}}}{5},\ \overrightarrow{\mathrm{CH}}=\frac{5}{6}\overrightarrow{\mathrm{CD}}$$

よって，AD : DB = 1 : 4，CH : HD = 5 : 1 である。

［解 説］

空間ベクトルの四面体への適用という頻出の問題です。

3

問題のページへ

(1)　a, b を 3 で割った余りと ab を 3 で割った余りの関係を表にまとめると，右のようになる。

a ＼ b	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

ここで，3 の倍数は 3 で割った余りが 0 から，表中の数値 0 に注目すると，ab が 3 の倍数であるとき，a または b は 3 の倍数である。

(2)　a, b を 3 で割った余りと $a+b$ を 3 で割った余りの関係を表にまとめると，右のようになる。

a ＼ b	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

すると，(1)の表と合わせてみると，$a+b$ と ab がともに 3 の倍数であるとき，a と b はともに 3 の倍数である。

(3)　まず，$a+b$ と a^2+b^2 がともに 3 の倍数であるとき，$2ab=(a+b)^2-(a^2+b^2)$ より，$2ab$ は 3 の倍数である。

2 と 3 は互いに素であるため，このとき ab は 3 の倍数である。

よって，(2)の結果から，a と b はともに 3 の倍数である。

［解　説］

(1)と(2)は，表を用いて，直接的な説明をしました。(3)も同様にできますが，ここは，出題者の意図を汲み，(2)の利用を考えました。