1

解答解説のページへ

a を実数とする。関数 $f(x)=ax+\cos x+\dfrac{1}{2}\sin 2x$ が極値をもたないように，a の値の範囲を定めよ。

2

解答解説のページへ

p を 3 以上の素数, a, b を自然数とする。以下の問いに答えよ。ただし, 自然数 m, n に対し, mn が p の倍数ならば, m または n は p の倍数であることを用いてよい。

(1) $a+b$ と ab がともに p の倍数であるとき, a と b はともに p の倍数であることを示せ。

(2) $a+b$ と a^2+b^2 がともに p の倍数であるとき, a と b はともに p の倍数であることを示せ。

(3) a^2+b^2 と a^3+b^3 がともに p の倍数であるとき, a と b はともに p の倍数であることを示せ。

3

解答解説のページへ

$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$，$g(x)=\dfrac{2\log x}{x^2}$　$(x>0)$とする。以下の問いに答えよ。ただし，自然対数の底eについて，$e=2.718\cdots$であること，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$であることを証明なしで用いてよい。

(1)　2曲線$y=f(x)$と$y=g(x)$の共有点の座標をすべて求めよ。

(2)　区間 $x>0$ において，関数$y=f(x)$と$y=g(x)$の増減，極値を調べ，2 曲線$y=f(x)$，$y=g(x)$のグラフの概形をかけ。グラフの変曲点は求めなくてよい。

(3)　区間 $1\leqq x\leqq e$ において，2 曲線$y=f(x)$と$y=g(x)$，および直線$x=e$で囲まれた図形の面積を求めよ。

4

解答解説のページへ

N を自然数とする。赤いカード 2 枚と白いカード N 枚が入っている袋から無作為にカードを 1 枚ずつ取り出して並べていくゲームをする。2 枚目の赤いカードが取り出された時点でゲームは終了する。赤いカードが最初に取り出されるまでに取り出された白いカードの枚数を X とし，ゲーム終了時までに取り出された白いカードの総数を Y とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$n=0,\ 1,\ \cdots,\ N$ に対して，$X=n$ となる確率 p_n を求めよ。

(2)　X の期待値を求めよ。

(3)　$n=0,\ 1,\ \cdots,\ N$ に対して，$Y=n$ となる確率 q_n を求めよ。

5

解答解説のページへ

座標平面において，点 $\mathrm{P}_n(a_n,\ b_n)$ $(n \geqq 1)$ を

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}\quad (n \geqq 2)$$

で定める。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　a_n，b_n を n と θ を用いて表せ。

(2)　$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ のとき，自然数 n に対して，線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の長さ l_n を求めよ。

(3)　(2)で求めた l_n に対して，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} l_n$ を求めよ。

$\boxed{1}$ 問題のページへ

$f(x)=ax+\cos x+\dfrac{1}{2}\sin 2x$ に対して,

$$f'(x)=a-\sin x+\cos 2x=a-(2\sin^2 x+\sin x-1)$$

ここで，$g(x)=2\sin^2 x+\sin x-1$ とおくと,

$$g(x)=2\left(\sin x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{8}$$

$-1\leqq\sin x\leqq 1$ より，$-\dfrac{9}{8}\leqq g(x)\leqq 2$……(＊)となる。

さて，$f(x)$ が極値をもたない条件は，$f'(x)$ の符号が変化しない条件に等しく，$f'(x)=a-g(x)$ に注目すると, (＊)から,

$$a\leqq-\frac{9}{8},\ \ 2\leqq a$$

［解 説］

微分法に関する基本問題です。増減表を書くまでもありませんでした。

2

問題のページへ

(1)　条件から, ab が p の倍数より, a または b は p の倍数である。

ここで, a, b の一方が p の倍数, 他方が p の倍数でないとき, $a+b$ は p の倍数ではない。また, a, b がともに p の倍数であるとき, $a+b$ は p の倍数である。

したがって, $a+b$ と ab がともに p の倍数であるとき, a と b はともに p の倍数である。

(2)　まず, $a+b$ と a^2+b^2 に対して,

$$2ab=(a+b)^2-(a^2+b^2)\cdots\cdots\cdots①$$

$a+b$ と a^2+b^2 がともに p の倍数であるので, ①より, $2ab$ は p の倍数である。

p は 3 以上の素数から, 2 と p は互いに素となるので, ab は p の倍数である。

よって, (1)の結果から, a と b はともに p の倍数である。

(3)　まず, a^2+b^2 と a^3+b^3 に対して,

$$ab(a+b)=(a+b)(a^2+b^2)-(a^3+b^3)\cdots\cdots\cdots②$$

a^2+b^2 と a^3+b^3 がともに p の倍数であるので, ②より, $ab(a+b)$ は p の倍数である。

すると, 条件より, ab または $a+b$ が p の倍数である。

(i)　ab が p の倍数であるとき

①より, $(a+b)^2$ は p の倍数となり, $a+b$ は p の倍数である。

(1)の結果より, a と b はともに p の倍数である。

(ii)　$a+b$ が p の倍数であるとき

(2)の結果より, a と b はともに p の倍数である。

(i)(ii)より, いずれの場合も, a と b はともに p の倍数である。

［解　説］

問題文に不必要と思えるほどのヒントが記されています。(3)の②式は①式を参考に作りました。なお, 文系に $p=3$ のときの類題が出ています。

3　　問題のページへ

(1)　$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$，$g(x)=\dfrac{2\log x}{x^2}$ に対し，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ を連立すると，

$$\frac{\log x}{x}=\frac{2\log x}{x^2},\ (x-2)\log x=0$$

これより，$x=1,\ 2$ となり，共有点の座標は，$(1,\ 0)$，$\left(2,\ \dfrac{1}{2}\log 2\right)$である。

(2)　まず，$f'(x)=\dfrac{1-\log x}{x^2}$ より，$y=f(x)$ の増減は右表のようになり，極大値は $\dfrac{1}{e}$ であり，

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$

$$\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{x}=-\infty$$

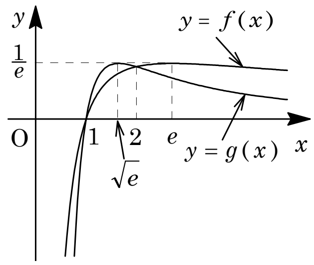
$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$$

また，$g'(x)=\dfrac{2x-4x\log x}{x^4}=\dfrac{2(1-2\log x)}{x^3}$ より，$y=g(x)$ の増減は右表のようになり，極大値は $\dfrac{1}{e}$ であり，

x	0	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$g'(x)$		$+$	0	$-$
$g(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$

$$\lim_{x\to+0}g(x)=\lim_{x\to+0}\frac{2\log x}{x^2}=-\infty,\ \lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}\cdot\frac{\log x}{x}=0$$

以上より，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフは右図のようになる。



(3)　$1\leqq x\leqq e$ において，2 曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$，および直線 $x=e$ で囲まれた図形の面積 S は，

$$S=\int_1^2\{g(x)-f(x)\}dx+\int_2^e\{f(x)-g(x)\}dx$$

さて，$\displaystyle\int f(x)dx=\int\frac{\log x}{x}dx=\frac{1}{2}(\log x)^2+C$

$$\int g(x)dx=\int\frac{2\log x}{x^2}dx=-\frac{2\log x}{x}+\int\frac{2}{x^2}dx=-\frac{2\log x+2}{x}+C$$

よって，$S=\left[-\dfrac{2\log x+2}{x}-\dfrac{1}{2}(\log x)^2\right]_1^2+\left[\dfrac{1}{2}(\log x)^2+\dfrac{2\log x+2}{x}\right]_2^e$

$$=-(\log 2+1)-\frac{1}{2}(\log 2)^2+2+\frac{1}{2}+\frac{4}{e}-\frac{1}{2}(\log 2)^2-(\log 2+1)$$

$$=-(\log 2)^2-2\log 2+\frac{4}{e}+\frac{1}{2}$$

［解　説］

標準的な計算量の微積分の問題です。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　$n+1$ 枚のカードを取り出して並べたとき，1 回目から n 回目までは白いカードを取り出し，$n+1$ 回目に赤いカードを取り出すと，$X=n$ であるので，この確率 p_n は,

$$p_n=\frac{{}_N\mathrm{P}_n\cdot{}_2\mathrm{P}_1}{{}_{N+2}\mathrm{P}_{n+1}}=\frac{\dfrac{2N!}{(N-n)!}}{\dfrac{(N+2)!}{(N-n+1)!}}=\frac{2(N-n+1)}{(N+1)(N+2)}$$

なお，この式は，$n=0$ のときも成り立つ。

(2)　X の期待値を $E(X)$ とおくと,

$$E(X)=\frac{2}{(N+1)(N+2)}\sum_{n=0}^{N}n(N-n+1)$$
$$=\frac{2}{(N+1)(N+2)}\sum_{n=0}^{N}\{-n^2+(N+1)n\}$$
$$=\frac{2}{(N+1)(N+2)}\left\{-\frac{1}{6}N(N+1)(2N+1)+\frac{1}{2}N(N+1)^2\right\}$$
$$=\frac{N\{-(2N+1)+3(N+1)\}}{3(N+2)}=\frac{N}{3}$$

(3)　$n+2$ 枚のカードを取り出して並べたとき，1 回目から $n+1$ 回目までに白いカードを n 枚，赤いカードを 1 枚取り出し，$n+2$ 回目に赤いカードを取り出すと，$Y=n$ であるので，この確率 q_n は,

$$q_n=\frac{{}_{n+1}\mathrm{C}_1\cdot{}_N\mathrm{P}_n\cdot{}_2\mathrm{P}_1\times 1}{{}_{N+2}\mathrm{P}_{n+2}}=\frac{\dfrac{2(n+1)N!}{(N-n)!}}{\dfrac{(N+2)!}{(N-n)!}}=\frac{2(n+1)}{(N+1)(N+2)}$$

なお，この式は，$n=0$ のときも成り立つ。

［解　説］

確率と期待値に関する基本題です。いろいろな考え方ができますが，(3)も(1)と同じ考え方をしています。

5

問題のページへ

(1) 座標平面上の点は，行列$\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$で表される 1 次変換によって，原点まわりに$\theta$だけ回転し，さらに原点との距離を$\dfrac{1}{2}$倍にする点に移されるので，

$$\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{n-1}\\ b_{n-1}\end{pmatrix}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix}a_1\\ b_1\end{pmatrix}$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\begin{pmatrix}\cos(n-1)\theta & -\sin(n-1)\theta\\ \sin(n-1)\theta & \cos(n-1)\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

よって，$a_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\cos(n-1)\theta$，$b_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\sin(n-1)\theta$

(2) (1)より，$a_{n+1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}\cos n\theta$，$b_{n+1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}\sin n\theta$

2 点$P_n(a_n,\ b_n)$，$P_{n+1}(a_{n+1},\ b_{n+1})$を結ぶ線分の長さ$l_n$は，

$$\begin{aligned}{l_n}^2&=(a_{n+1}-a_n)^2+(b_{n+1}-b_n)^2\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\{\cos n\theta-2\cos(n-1)\theta\}^2+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\{\sin n\theta-2\sin(n-1)\theta\}^2\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\{1+4-4\cos n\theta\cos(n-1)\theta-4\sin n\theta\sin(n-1)\theta\}\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}(5-4\cos\theta)\end{aligned}$$

$\theta=\dfrac{\pi}{3}$のとき，${l_n}^2=3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n}$となり，$l_n=\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}$

(3) 数列$\{l_n\}$は，公比$\dfrac{1}{2}$の等比数列なので，

$$\sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$$

［解 説］

回転・拡大という相似変換を題材にした問題です。この場合について，行列の n 乗に関しては，この程度の記述でよいでしょう。