1

解答解説のページへ

実数 x, y に対して, 等式 $x^2+y^2=x+y$ ……①を考える。$t=x+y$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) ①の等式が表す xy 平面上の図形を図示せよ。

(2) x と y が①の等式を満たすとき, t のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) x と y が①の等式を満たすとする。$F=x^3+y^3-x^2y-xy^2$ を t を用いた式で表せ。また, F のとりうる値の最大値と最小値を求めよ。

2

解答解説のページへ

xy 平面上に相異なる 4 点 A, B, C, D があり，線分 AC と BD は原点 O で交わっている。点 A の座標は(1, 2) で，線分 OA と OD の長さは等しく，四角形 ABCD は円に内接している。$\angle\mathrm{AOD}=\theta$ とおき，点 C の x 座標を a，四角形 ABCD の面積を S とする。以下の問いに答えよ。

(1) 線分 OC の長さを a を用いた式で表せ。また，線分 OB と OC の長さは等しいことを示せ。

(2) S を a と θ を用いた式で表せ。

(3) $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ とし，$20\leqq S\leqq 40$ とするとき，a のとりうる値の最大値を求めよ。

3

解答解説のページへ

袋の中に 0 から 4 までの数字のうち 1 つが書かれたカードが 1 枚ずつ合計 5 枚入っている。4 つの数 0, 3, 6, 9 をマジックナンバーと呼ぶことにする。次のようなルールをもつ, 1 人で行うゲームを考える。

[ルール]　袋から無作為に 1 枚ずつカードを取り出していく。ただし, 一度取り出したカードは袋に戻さないものとする。取り出したカードの数字の合計がマジックナンバーになったとき, その時点で負けとし, それ以降はカードを取り出さない。途中で負けとなることなく, すべてのカードを取り出せたとき, 勝ちとする。

以下の問いに答えよ。

(1)　2 枚のカードを取り出したところで負けとなる確率を求めよ。

(2)　3 枚のカードを取り出したところで負けとなる確率を求めよ。

(3)　このゲームで勝つ確率を求めよ。

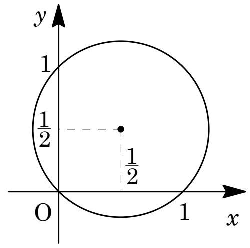
1

問題のページへ

(1)　条件より，$x^2+y^2=x+y$ ……①を変形すると，

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

よって，中心$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，半径$\frac{1}{\sqrt{2}}$の円を表し，図示すると，右図のようになる。



(2)　①の等式を満たす x と y に対して，$t=x+y$ ……②のとりうる値の範囲は，円①と直線②が共有点をもつ条件として求められ，

$$\frac{\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-t\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}\leqq\frac{1}{\sqrt{2}},\ \ |1-t|\leqq 1$$

よって，$0\leqq t\leqq 2$ となる。

(3)　①②より，$x^2+y^2=x+y=t$ から，$2xy=(x+y)^2-(x^2+y^2)=t^2-t$ となり，

$$F=x^3+y^3-x^2y-xy^2=(x+y)(x^2-xy+y^2)-xy(x+y)$$
$$=(x+y)(x^2-2xy+y^2)$$
$$=t(t-t^2+t)=-t^3+2t^2$$

すると，$\frac{dF}{dt}=-3t^2+4t=-t(3t-4)$

t	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	2
$\frac{dF}{dt}$		$+$	0	$-$	
F	0	↗	$\frac{32}{27}$	↘	0

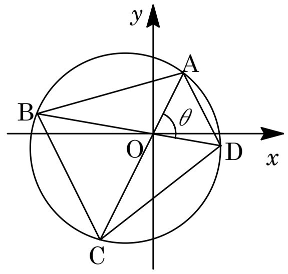
これより，F の増減は右表のようになり，F の最大値は$\frac{32}{27}$，最小値は 0 である。

［解　説］

条件づけられた最大・最小問題です。基本的な問題に誘導が付いています。

２

問題のページへ



(1)　3 点 A, O, C は同一直線上にあり，点 A(1, 2) で，点 C の x 座標が a から，C$(a,\ 2a)$ とおくことができる。ただし，$a<0$ である。これより，

$$\mathrm{OC}=\sqrt{a^2+(2a)^2}=\sqrt{5}\,|a|=-\sqrt{5}a$$

また，方べきの定理から，$\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OC}=\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OD}$

すると，条件より $\mathrm{OA}=\mathrm{OD}$ なので，$\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$

(2)　(1)より，$\mathrm{AC}=\mathrm{BD}=\sqrt{5}-\sqrt{5}a=\sqrt{5}(1-a)$ より，四角形 ABCD の面積 S は,

$$S=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{5}(1-a)\right\}^2\sin\theta=\frac{5}{2}(1-a)^2\sin\theta$$

(3)　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，$S=\dfrac{5}{2}(1-a)^2\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{4}(1-a)^2$

条件より, $20\leqq S\leqq 40$ なので，$20\leqq\dfrac{5}{4}(1-a)^2\leqq 40$ となり,

$$16\leqq(1-a)^2\leqq 32,\quad 4\leqq 1-a\leqq 4\sqrt{2},\quad 1-4\sqrt{2}\leqq a\leqq -3$$

したがって, a のとりうる値の最大値は -3 である。

［解　説］

対角線の長さとその交角をもとに, 四角形の面積を導く有名な問題です。注意しなくてはいけないのは, a が負ということです。

3

問題のページへ

(1)　2 枚のカードを取り出したところで負けとなるのは，カードの取り出し方が，

$1 \to 2$，$2 \to 1$，$2 \to 4$，$4 \to 2$

よって，その確率は，$\frac{1}{5} \times \frac{1}{4} \times 4 = \frac{1}{5}$ である。

(2)　3 枚のカードを取り出したところで負けとなるのは，カードの取り出し方が，

$1 \to 0 \to 2$，$1 \to 3 \to 2$，$2 \to 0 \to 1$，$2 \to 0 \to 4$，$2 \to 3 \to 1$，$2 \to 3 \to 4$

$4 \to 0 \to 2$，$4 \to 3 \to 2$，

よって，その確率は，$\frac{1}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times 8 = \frac{2}{15}$ である。

(3)　1 枚のカードを取り出したところで負けとなるのは，0 または 3 のカードを取り出したときより，その確率は，$\frac{1}{5} \times 2 = \frac{2}{5}$ である。

4 枚のカードを取り出したところで負けとなるのは，カードの取り出し方が，

$1 \to 0 \to 3 \to 2$，$1 \to 3 \to 0 \to 2$，$2 \to 0 \to 3 \to 1$，$2 \to 0 \to 3 \to 4$

$2 \to 3 \to 0 \to 1$，$2 \to 3 \to 0 \to 4$，$4 \to 0 \to 3 \to 2$，$4 \to 3 \to 0 \to 2$

よって，その確率は，$\frac{1}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 8 = \frac{1}{15}$ である。

以上より，このゲームで勝つ確率は, (1), (2)の結果を合わせて，

$$1 - \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{2}{15} + \frac{1}{15}\right) = \frac{1}{5}$$

［解 説］

樹形図でも利用して，どんどん処理をしていくのが最も効率よいセンタータイプの問題です。