1

解答解説のページへ

座標平面上に 2 点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$ と直線 l があり，A と l の距離と B と l の距離の和が 1 であるという。以下の問いに答えよ。

(1) l は y 軸と平行でないことを示せ。

(2) l は線分 AB と交わるとき，l の傾きを求めよ。

(3) l が線分 AB と交わらないとき，l と原点との距離を求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

a を正の実数とする。2 つの放物線 $y=\frac{1}{2}x^2-3a$，$y=-\frac{1}{2}x^2+2ax-a^3-a^2$ が異なる 2 点で交わるとし，2 つの放物線によって囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) a の値の範囲を求めよ。

(2) $S(a)$ を a を用いて表せ。

(3) $S(a)$ の最大値とそのときの a の値を求めよ。

$\boxed{3}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1)　正の実数 x, y に対して，$\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y} \geqq 2$ が成り立つことを示し，等号が成立するための条件を求めよ。

(2)　n を自然数とする。n 個の正の実数 a_1，…，a_n に対して

$$(a_1+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right) \geqq n^2$$

が成り立つことを示し，等号が成立するための条件を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　l が y 軸と平行であるとき，k を実数として，$l: x=k$ とおくと，A$(1,\ 0)$ と l の距離が $|k-1|$，B$(-1,\ 0)$ と l の距離が $|k+1|$ となる。条件より，

$$|k-1|+|k+1|=1 \cdots\cdots\cdots ①$$

ところが，$|k-1|+|k+1|=|1-k|+|k+1|\geqq|(1-k)+(k+1)|=2$ であるので，

①を満たす k は存在しない。よって，l は y 軸と平行でない。

(2)　(1)より，$l: y=mx+n$，すなわち $mx-y+n=0$ とおく。

すると，l は線分 AB と交わることより，$(m+n)(-m+n)\leqq 0 \cdots\cdots\cdots ②$

ここで，A と l の距離が $\dfrac{|m+n|}{\sqrt{m^2+1}}$，B と l の距離が $\dfrac{|-m+n|}{\sqrt{m^2+1}}$ となるので，

$$\frac{|m+n|}{\sqrt{m^2+1}}+\frac{|-m+n|}{\sqrt{m^2+1}}=1,\quad |m+n|+|-m+n|=\sqrt{m^2+1}$$

$$(m+n)^2+(-m+n)^2+2|(m+n)(-m+n)|=m^2+1 \cdots\cdots\cdots ③$$

②より，$m^2+2n^2-2(m+n)(-m+n)=1$ となり，$3m^2=1$

よって，l の傾きは，$m=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である。

(3)　l が線分 AB と交わらないとき，$(m+n)(-m+n)>0 \cdots\cdots\cdots ④$

③④より，$m^2+2n^2+2(m+n)(-m+n)=1$ となり，$-m^2+4n^2=1 \cdots\cdots\cdots ⑤$

すると，l と原点との距離 d は，⑤より，

$$d=\frac{|n|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{|n|}{\sqrt{4n^2}}=\frac{|n|}{2|n|}=\frac{1}{2}$$

［解　説］

点と直線についての問題です。方針がうまく立つように誘導がつけられているおもしろい問題です。なお，②と④は，正領域・負領域の考え方を利用しています。

2

問題のページへ

(1) 放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2-3a$ ……①，$y=-\dfrac{1}{2}x^2+2ax-a^3-a^2$ ……②を連立して，

$$\frac{1}{2}x^2-3a=-\frac{1}{2}x^2+2ax-a^3-a^2,\ \ x^2-2ax+a^3+a^2-3a=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

異なる 2 交点をもつことより，

$$D/4=a^2-(a^3+a^2-3a)=-a^3+3a>0,\ \ a(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})<0$$

すると，$a>0$ より，$0<a<\sqrt{3}$

(2) ③の 2 つの解を，$\alpha=a-\sqrt{-a^3+3a}$，$\beta=a+\sqrt{-a^3+3a}$ とおくと，放物線①②によって囲まれる部分の面積 $S(a)$ は，

$$S(a)=\int_\alpha^\beta -(x^2-2ax+a^3+a^2-3a)dx=-\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}\left(2\sqrt{-a^3+3a}\right)^3=\frac{4}{3}\left(\sqrt{-a^3+3a}\right)^3$$

(3) $f(a)=-a^3+3a$ とおくと，$S(a)=\dfrac{4}{3}\left(\sqrt{f(a)}\right)^3$ となり，

$$f'(a)=-3a^2+3=-3(a+1)(a-1)$$

すると，$f(a)$ の増減は右表のようになり，$f(a)$ は $a=1$ のとき最大値 2 をとる。

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$
$f'(a)$		$+$	0	$-$	
$f(a)$		$\nearrow$	2	$\searrow$	

よって，$S(a)$ の最大値は $\dfrac{4}{3}(\sqrt{2})^3=\dfrac{8}{3}\sqrt{2}$ であり，このとき $a=1$ となる。

［解　説］

超頻出の問題です。計算ミスが致命傷になります。

3　　問題のページへ

(1)　正の実数 x, y に対して，相加平均と相乗平均の関係より，

$$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\geqq 2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}}=2$$

等号は $\frac{y}{x}=\frac{x}{y}$，すなわち $x=y$ のとき成立する。

(2)　まず，正の実数 a_1 に対して，$a_1\cdot\frac{1}{a_1}=1=1^2$ である。

次に，$n\geqq 2$ のとき，正の実数 a_1，…，a_n に対して，

$$(a_1+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\geqq n^2 \quad (\text{等号は}\ a_1=\cdots=a_n\ \text{のとき成立})\cdots\cdots(*)$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=2$ のとき　(1)より，

$$(a_1+a_2)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right)=2+\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}\geqq 2+2=2^2 \quad (\text{等号は}\ a_1=a_2\ \text{のとき成立})$$

(ii)　$n=k$ のとき

$(a_1+\cdots+a_k)\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right)\geqq k^2$ (等号は $a_1=\cdots=a_k$ のとき成立)と仮定すると，

$$(a_1+\cdots+a_k+a_{k+1})\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_k}+\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

$$=(a_1+\cdots+a_k)\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right)+\frac{1}{a_{k+1}}(a_1+\cdots+a_k)+a_{k+1}\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right)+1$$

$$\geqq k^2+\left(\frac{a_1}{a_{k+1}}+\frac{a_{k+1}}{a_1}\right)+\cdots+\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}+\frac{a_{k+1}}{a_k}\right)+1$$

$$\geqq k^2+(2+\cdots+2)+1=k^2+2k+1=(k+1)^2$$

等号は $a_1=a_{k+1}$，…，$a_k=a_{k+1}$，すなわち $a_1=\cdots=a_k=a_{k+1}$ のときに成立する。

(i)(ii)より，$n\geqq 2$ のとき，正の実数 a_1，…，a_n に対して，$(*)$が成り立つ。

以上より，自然数 n に対して，$(*)$が成立する。

［解 説］

相加平均と相乗平均を用いて証明する有名問題です。(2)は数学的帰納法を用いましたが，不等式の左辺を展開して示すこともできます。