1

解答解説のページへ

座標平面上に 2 点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$ と直線 l があり，A と l の距離と B と l の距離の和が 1 であるという。以下の問いに答えよ。

(1) l は y 軸と平行でないことを示せ。

(2) l が線分 AB と交わるとき，l の傾きを求めよ。

(3) l が線分 AB と交わらないとき，l と原点との距離を求めよ。

2

解答解説のページへ

x を実数とし，$A=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$P=A-xE$ とおく。P は $P^2=P$ を満たすとする。以下の問いに答えよ。

(1) x の値を求めよ。

(2) n を自然数とする。$A^n=a_nP+b_nE$ を満たす a_n，b_n を n を用いて表せ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

$x>0$ に対し，関数 $f(x)$ を，$f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ と定め，$g(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{d}{dx}f(x)$ を求めよ。

(2) $\dfrac{d}{dx}g(x)$ を求めよ。

(3) $f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ を求めよ。

4

解答解説のページへ

自然対数の底を e とする。以下の問いに答えよ。

(1) $e<3$ であることを用いて，不等式 $\log 2>\dfrac{3}{5}$ が成り立つことを示せ。

(2) 関数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}-x$ の導関数を求めよ。

(3) 積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{1+\cos x}dx$ の値を求めよ。

(4) (3)で求めた値が正であるか負であるかを判定せよ。

$\boxed{5}$　解答解説のページへ

座標平面上の曲線 C を，媒介変数 $0 \leqq t \leqq 1$ を用いて

$$x = 1 - t^2,\quad y = t - t^3$$

と定める。以下の問いに答えよ。

(1)　曲線 C の概形を描け。

(2)　曲線 C と x 軸で囲まれた部分が，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

1　　問題のページへ

(1)　l が y 軸と平行であるとき，k を実数として，$l: x=k$ とおくと，A$(1,\ 0)$ と l の距離が $|k-1|$，B$(-1,\ 0)$ と l の距離が $|k+1|$ となる。条件より，

$$|k-1|+|k+1|=1 \cdots\cdots\cdots ①$$

ところが，$|k-1|+|k+1|=|1-k|+|k+1|\geqq|(1-k)+(k+1)|=2$ であるので，

①を満たす k は存在しない。よって，l は y 軸と平行でない。

(2)　(1)より，$l: y=mx+n$，すなわち $mx-y+n=0$ とおく。

すると，l は線分 AB と交わることより，$(m+n)(-m+n)\leqq 0 \cdots\cdots\cdots ②$

ここで，A と l の距離が $\dfrac{|m+n|}{\sqrt{m^2+1}}$，B と l の距離が $\dfrac{|-m+n|}{\sqrt{m^2+1}}$ となるので，

$$\frac{|m+n|}{\sqrt{m^2+1}}+\frac{|-m+n|}{\sqrt{m^2+1}}=1,\quad |m+n|+|-m+n|=\sqrt{m^2+1}$$

$$(m+n)^2+(-m+n)^2+2|(m+n)(-m+n)|=m^2+1 \cdots\cdots\cdots ③$$

②より，$m^2+2n^2-2(m+n)(-m+n)=1$ となり，$3m^2=1$

よって，l の傾きは，$m=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である。

(3)　l が線分 AB と交わらないとき，$(m+n)(-m+n)>0 \cdots\cdots\cdots ④$

③④より，$m^2+2n^2+2(m+n)(-m+n)=1$ となり，$-m^2+4n^2=1 \cdots\cdots\cdots ⑤$

すると，l と原点との距離 d は，⑤より，

$$d=\frac{|n|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{|n|}{\sqrt{4n^2}}=\frac{|n|}{2|n|}=\frac{1}{2}$$

［解 説］

点と直線についての問題です。方針がうまく立つように誘導がつけられているおもしろい問題です。なお，②と④は，正領域・負領域の考え方を利用しています。

2

問題のページへ

(1)　$A=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$に対して，ハミルトン・ケーリーの定理より，

$$A^2-5A+6E=O,\ A^2=5A-6E\cdots\cdots\cdots①$$

条件より，$P=A-xE$ に対して $P^2=P$ から，$(A-xE)^2=A-xE$ となり，

$$A^2-2xA+x^2E=A-xE\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$5A-6E-2xA+x^2E=A-xE$，$(4-2x)A+(x^2+x-6)E=O$

すると, A は E の定数倍でないので,

$$4-2x=x^2+x-6=0,\ x=2$$

(2)　(1)より，$P=A-2E=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$となり，$A=P+2E$

さて，$A^n=a_nP+b_nE$ とおくと，$a_1=1$，$b_1=2$

ここで，$A^{n+1}=A^nA$ に，$P^2=P$ を適用すると，

$$\begin{aligned}a_{n+1}P+b_{n+1}E&=(a_nP+b_nE)(P+2E)=a_nP^2+(2a_n+b_n)P+2b_nE\\&=(3a_n+b_n)P+2b_nE\end{aligned}$$

すると, A は E の定数倍でないので,

$$a_{n+1}=3a_n+b_n\cdots\cdots\cdots③,\ b_{n+1}=2b_n\cdots\cdots\cdots④$$

④より，$b_n=b_1\cdot 2^{n-1}=2^n$

③に代入して，$a_{n+1}=3a_n+2^n$ となり，$a_{n+1}+2^{n+1}=3(a_n+2^n)$

$$a_n+2^n=(a_1+2^1)\cdot 3^{n-1}=3^n,\ a_n=3^n-2^n$$

［解 説］

行列の n 乗について, 漸化式を利用する有名問題です。なお, (2)は上の解答例以外に, 二項定理を利用して直接的に計算しても構いません。

3

問題のページへ

(1) $f(x)=\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ に対して，$\frac{d}{dx}f(x)=\frac{1}{1+x^2}$

(2) $\frac{d}{dx}g(x)=\frac{d}{dx}f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{1+x^2}$

(3) $\frac{d}{dx}\left\{f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\right\}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0$ より，C を定数として，

$$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=C\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$t=\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$$f(1)=\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\pi}{4}$$

$(*)$に $x=1$ を代入すると，$C=2f(1)=\frac{\pi}{2}$ となるので，

$$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$$

［解 説］

誘導に従えば，あっけなく片付いてしまう微積分の基本問題です。

4

問題のページへ

(1) $e<3$ より，$e^3<27<32=2^5$ であるので，$e^{\frac{3}{5}}<2$ となる。
よって，$\log 2>\dfrac{3}{5}$ が成り立つ。

(2) $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}-x$ に対して，

$$f'(x)=\frac{\cos x(1+\cos x)-\sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}-1=\frac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2}-1$$
$$=\frac{1}{1+\cos x}-1=-\frac{\cos x}{1+\cos x}$$

(3) $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{1+\cos x}dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin x}{1+\cos x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{1+\cos x}dx$ とすると，

$$I=-\Big[\log(1+\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\Big[\frac{\sin x}{1+\cos x}-x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\log 2+1-\frac{\pi}{2}$$

(4) (1)より，$\log 2>\dfrac{3}{5}$，および $\pi<3.2$ を用いると，

$$I=\log 2+1-\frac{\pi}{2}>\frac{3}{5}+1-\frac{3.2}{2}=0$$

［解 説］

前問と同様，細かな誘導のついた定積分の計算問題です。

$\boxed{5}$

問題のページへ

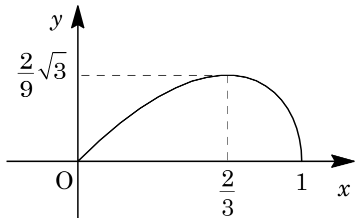
(1)　$0 \leqq t \leqq 1$ のとき，$x=1-t^2$，$y=t-t^3$ に対し，

$$\frac{dx}{dt}=-2t\,,\ \frac{dy}{dt}=1-3t^2$$

これより，x，y の増減は右表のようになる。

すると，曲線 C の概形は右下図のようになる。

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$\frac{dx}{dt}$	0	$-$		$-$	
x	1	$\searrow$	$\frac{2}{3}$	$\searrow$	0
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{2}{9}\sqrt{3}$	$\searrow$	0



(2)　曲線 C と x 軸で囲まれた部分を，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V は,

$$\begin{aligned}V&=\int_0^1 2\pi x\cdot y\,dx\\&=2\pi\int_1^0 (1-t^2)(t-t^3)(-2t)\,dt\\&=4\pi\int_0^1 (t^2-2t^4+t^6)\,dt\\&=4\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{5}+\frac{1}{7}\right)\\&=\frac{32}{105}\pi\end{aligned}$$

［解　説］

パラメータ曲線の基本問題です。(2)は，いわゆる円筒分割によって体積を計算しています。