1

解答解説のページへ

空間において，2 点 $\mathrm{A}(0,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0,\ 0)$ を通る直線を l とする。次の問いに答えよ。

(1) 点 P を l 上に，点 Q を z 軸上にとる。$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ がベクトル $(3,\ 1,\ -1)$ と平行になるときの P と Q の座標をそれぞれ求めよ。

(2) 点 R を l 上に，点 S を z 軸上にとる。$\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ およびベクトル $(0,\ 0,\ 1)$ の両方に垂直になるときの R と S の座標をそれぞれ求めよ。

(3) R, S を(2)で求めた点とする。点 T を l 上に，点 U を z 軸上にとる。また，$\vec{v}=(a,\ b,\ c)$ は零ベクトルではなく，$\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ に垂直ではないとする。$\overrightarrow{\mathrm{TU}}$ が $\vec{v}$ と平行になるときの T と U の座標をそれぞれ求めよ。

2

解答解説のページへ

a, b, c は実数とし，$a<b$ とする。平面上の相異なる 3 点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$，$\mathrm{C}(c,\ c^2)$ が，辺 AB を斜辺とする直角三角形を作っているとする。次の問いに答えよ。

(1) a を b, c を用いて表せ。

(2) $b-a\geqq 2$ が成り立つことを示せ。

(3) 斜辺 AB の長さの最小値と，そのときの A, B, C の座標をそれぞれ求めよ。

3

解答解説のページへ

赤色，緑色，青色のさいころが各 2 個ずつ，計 6 個ある。これらを同時にふるとき，

赤色 2 個のさいころの出た目の数 r_1，r_2 に対し $R=|r_1-r_2|$

緑色 2 個のさいころの出た目の数 g_1，g_2 に対し $G=|g_1-g_2|$

青色 2 個のさいころの出た目の数 b_1，b_2 に対し $B=|b_1-b_2|$

とする。次の問いに答えよ。

(1) R がとりうる値と，R がそれらの各値をとる確率をそれぞれ求めよ。

(2) $R \geqq 4$，$G \geqq 4$，$B \geqq 4$ が同時に成り立つ確率を求めよ。

(3) $RGB \geqq 80$ となる確率を求めよ。

1

問題のページへ

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ -1,\ 0)$ より，k を実数として，直線 l は，

$$l:(x,\ y,\ z)=(0,\ 1,\ 0)+k(-1,\ -1,\ 0)=(-k,\ 1-k,\ 0)$$

さて，l 上に点 P，z 軸上に点 Q とると，p，q を実数として，$\mathrm{P}(-p,\ 1-p,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ 0,\ q)$ と表せるので，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(p,\ p-1,\ q)$ となる。

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ はベクトル $(3,\ 1,\ -1)$ と平行なので，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=l(3,\ 1,\ -1)$ (l は実数)から，

$$p=3l,\ p-1=l,\ q=-l$$

すると，$l=\frac{1}{2}$，$p=\frac{3}{2}$，$q=-\frac{1}{2}$ から，$\mathrm{P}\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{Q}\left(0,\ 0,\ -\frac{1}{2}\right)$ となる。

(2) l 上に点 R，z 軸上に点 S とると，r，s を実数として，$\mathrm{R}(-r,\ 1-r,\ 0)$，$\mathrm{S}(0,\ 0,\ s)$ と表せるので，$\overrightarrow{\mathrm{RS}}=(r,\ r-1,\ s)$ となる。

$\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ および $\vec{z}=(0,\ 0,\ 1)$ に垂直なので，$\overrightarrow{\mathrm{RS}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{RS}}\cdot\vec{z}=0$ から，

$$-r-r+1=0,\ s=0$$

すると，$r=\frac{1}{2}$，$s=0$ から，$\mathrm{R}\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{S}(0,\ 0,\ 0)$ となる。

(3) l 上に点 T，z 軸上に点 U とると，t，u を実数として，$\mathrm{T}(-t,\ 1-t,\ 0)$，$\mathrm{U}(0,\ 0,\ u)$ と表せるので，$\overrightarrow{\mathrm{TU}}=(t,\ t-1,\ u)$ となる。

ここで，$\vec{v}=(a,\ b,\ c)\neq\vec{0}$ は $\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ に垂直ではないので，$\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RS}}\neq 0$ から，

$$\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b\neq 0,\ a-b\neq 0$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{TU}}$ は $\vec{v}=(a,\ b,\ c)$ と平行なので，$\overrightarrow{\mathrm{TU}}=m(a,\ b,\ c)$ (m は実数)から，

$$t=ma,\ t-1=mb,\ u=mc$$

すると，$m(a-b)=1$ より，$m=\frac{1}{a-b}$ となり，$t=\frac{a}{a-b}$，$u=\frac{c}{a-b}$ から，

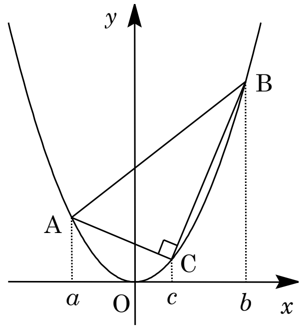
$$\mathrm{T}\left(-\frac{a}{a-b},\ -\frac{b}{a-b},\ 0\right),\ \mathrm{U}\left(0,\ 0,\ \frac{c}{a-b}\right)$$

［解 説］

同じような問題が 3 題も続きます。上の解答例は，意味を考えずに，ただ計算を行ったにすぎません。

2

問題のページへ



(1)　$\mathrm{A}(a,\ a^2)$, $\mathrm{B}(b,\ b^2)$, $\mathrm{C}(c,\ c^2)$ に対して,

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(a-c,\ a^2-c^2)=(a-c)(1,\ a+c)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=(b-c,\ b^2-c^2)=(b-c)(1,\ b+c)$$

条件より, $\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=0$ なので, $1+(a+c)(b+c)=0$

$$(a+c)(b+c)=-1\cdots\cdots\cdots①$$

よって, $a=-c-\dfrac{1}{b+c}\cdots\cdots\cdots②$

(2)　②より, $b-a=b+c+\dfrac{1}{b+c}\cdots\cdots\cdots③$

ここで, $b+c<0$ とすると, ①より $a+c>0$ となり $b<-c<a$ であるが, これは $a<b$ に反するので, $b+c>0$ である。

すると, ③より, 相加平均と相乗平均の関係を用いて,

$$b-a=b+c+\frac{1}{b+c}\geqq 2\sqrt{(b+c)\cdot\frac{1}{b+c}}=2$$

なお, 等号は $b+c=1$ のときに成立する。

(3)　$\mathrm{AB}=\sqrt{(b-a)^2+(b^2-a^2)^2}=\sqrt{(b-a)^2\{1+(b+a)^2\}}=(b-a)\sqrt{1+(b+a)^2}$

ここで, (2)より $b-a\geqq 2$ であり, $(b+a)^2\geqq 0$ であるので,

$$\mathrm{AB}\geqq 2\sqrt{1+0}=2$$

等号が成立するのは, $b-a=2$ かつ $b+a=0$, すなわち $a=-1$, $b=1$ のときである。このとき, $b+c=1$ から $c=0$ となる。

よって, AB の最小値は 2 であり, このとき $\mathrm{A}(-1,\ 1)$, $\mathrm{B}(1,\ 1)$, $\mathrm{C}(0,\ 0)$ となる。

［解　説］

(3)では大雑把に評価して, 細部を詰めています。この方法が, いつもうまくいくとは限りませんが。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1)　まず，2 つのさいころの出た目の数とその差の絶対値をまとめると，右表のようになる。

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

これより, R がとりうる値とその確率は,

(i)　$R=0$ のとき　確率は $\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$

(ii)　$R=1$ のとき　確率は $\dfrac{10}{36}=\dfrac{5}{18}$

(iii)　$R=2$ のとき　確率は $\dfrac{8}{36}=\dfrac{2}{9}$

(iv)　$R=3$ のとき　確率は $\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$

(v)　$R=4$ のとき　確率は $\dfrac{4}{36}=\dfrac{1}{9}$

(iv)　$R=5$ のとき　確率は $\dfrac{2}{36}=\dfrac{1}{18}$

(2)　$R\geqq 4$ である確率は, (1)より，$\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{18}=\dfrac{1}{6}$ となり，$G\geqq 4$，$B\geqq 4$ の場合も同様なので，$R\geqq 4$，$G\geqq 4$，$B\geqq 4$ が同時に成り立つ確率は,

$$\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{216}$$

(3)　$RGB\geqq 80$ となるのは，$(R,\ G,\ B)$ の組が，$R\geqq G\geqq B$ とすると，

$(5,\ 4,\ 4)$，$(5,\ 5,\ 4)$，$(5,\ 5,\ 5)$

すると, R, G, B の対応を考えて，求める確率は,

$${}_3\mathrm{C}_1\frac{1}{18}\left(\frac{1}{9}\right)^2+{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{18}\right)^2\frac{1}{9}+\left(\frac{1}{18}\right)^3=\frac{19}{5832}$$

［解　説］

センター試験のように表を作ると，後は一気呵成に進みます。なお, (3)では(2)の結果を利用して，余事象という考え方もあります。