1

解答解説のページへ

空間において，2 点 $A(0,\ 1,\ 0)$，$B(-1,\ 0,\ 0)$ を通る直線を l とする。次の問いに答えよ。

(1) 点 P を l 上に，点 Q を z 軸上にとる。$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ がベクトル $(3,\ 1,\ -1)$ と平行になるときの P と Q の座標をそれぞれ求めよ。

(2) 点 R を l 上に，点 S を z 軸上にとる。$\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ およびベクトル $(0,\ 0,\ 1)$ の両方に垂直になるときの R と S の座標をそれぞれ求めよ。

(3) R, S を(2)で求めた点とする。点 T を l 上に，点 U を z 軸上にとる。また，$\vec{v}=(a,\ b,\ c)$ は零ベクトルではなく，$\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ に垂直ではないとする。$\overrightarrow{\mathrm{TU}}$ が $\vec{v}$ と平行になるときの T と U の座標をそれぞれ求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

p, r を $-r < p < r$ を満たす実数とする。4 点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$, $\mathrm{Q}(r,\ p^2)$, $\mathrm{R}(r,\ r^2)$, $\mathrm{S}(p,\ r^2)$ に対し, 線分 PR の長さは 1 であるとする。このとき, 長方形 PQRS の面積の最大値と, そのときの P, R の x 座標をそれぞれ求めよ。

3

解答解説のページへ

c を $0<c<1$ を満たす実数とする。$f(x)$ を 2 次以下の多項式とし，曲線 $y=f(x)$ が 3 点 $(0,\ 0)$，$(c,\ c^3-2c)$，$(1,\ -1)$ を通るとする。次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ を求めよ。

(2)　曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=x^3-2x$ で囲まれた部分の面積 S を c を用いて表せ。

(3)　(2)で求めた S を最小にするような c の値を求めよ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

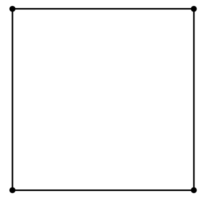
$a,\ b$ を実数とする。次の問いに答えよ。

(1) $f(x)=a\cos x+b$ が，$\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,dx=\frac{\pi}{4}+\int_0^{\pi}\{f(x)\}^3dx$ を満たすとする。このとき，$a,\ b$ が満たす関係式を求めよ。

(2) (1)で求めた関係式を満たす正の数 b が存在するための a の条件を求めよ。

5

解答解説のページへ



動点 P が，図のような正方形 ABCD の頂点 A から出発し，さいころをふるごとに，次の規則により正方形のある頂点から他の頂点に移動する。

出た目の数が 2 以下なら辺 AB と平行な方向に移動する。

出た目の数が 3 以上なら辺 AD と平行な方向に移動する。

n を自然数とするとき，さいころを $2n$ 回ふった後に動点 P が A にいる確率を a_n，C にいる確率を c_n とする。次の問いに答えよ。

(1) a_1 を求めよ。

(2) さいころを $2n$ 回ふった後，動点 P は A または C にいることを証明せよ。

(3) a_n，c_n を n を用いてそれぞれ表せ。

(4) $\lim_{n\to\infty} a_n$，$\lim_{n\to\infty} c_n$ をそれぞれ求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ -1,\ 0)$ より，k を実数として，直線 l は，

$$l:(x,\ y,\ z)=(0,\ 1,\ 0)+k(-1,\ -1,\ 0)=(-k,\ 1-k,\ 0)$$

さて，l 上に点 P，z 軸上に点 Q とると，p，q を実数として，$\mathrm{P}(-p,\ 1-p,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ 0,\ q)$ と表せるので，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(p,\ p-1,\ q)$ となる。

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ はベクトル $(3,\ 1,\ -1)$ と平行なので，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=l(3,\ 1,\ -1)$ （l は実数)から，

$$p=3l,\ p-1=l,\ q=-l$$

すると，$l=\frac{1}{2}$，$p=\frac{3}{2}$，$q=-\frac{1}{2}$ から，$\mathrm{P}\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{Q}\left(0,\ 0,\ -\frac{1}{2}\right)$ となる。

(2)　l 上に点 R，z 軸上に点 S とると，r，s を実数として，$\mathrm{R}(-r,\ 1-r,\ 0)$，$\mathrm{S}(0,\ 0,\ s)$ と表せるので，$\overrightarrow{\mathrm{RS}}=(r,\ r-1,\ s)$ となる。

$\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ および $\vec{z}=(0,\ 0,\ 1)$ に垂直なので，$\overrightarrow{\mathrm{RS}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{RS}}\cdot\vec{z}=0$ から，

$$-r-r+1=0,\ s=0$$

すると，$r=\frac{1}{2}$，$s=0$ から，$\mathrm{R}\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{S}(0,\ 0,\ 0)$ となる。

(3)　l 上に点 T，z 軸上に点 U とると，t，u を実数として，$\mathrm{T}(-t,\ 1-t,\ 0)$，$\mathrm{U}(0,\ 0,\ u)$ と表せるので，$\overrightarrow{\mathrm{TU}}=(t,\ t-1,\ u)$ となる。

ここで，$\vec{v}=(a,\ b,\ c)\neq\vec{0}$ は $\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ に垂直ではないので，$\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RS}}\neq 0$ から，

$$\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b\neq 0,\ a-b\neq 0$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{TU}}$ は $\vec{v}=(a,\ b,\ c)$ と平行なので，$\overrightarrow{\mathrm{TU}}=m(a,\ b,\ c)$ （m は実数)から，

$$t=ma,\ t-1=mb,\ u=mc$$

すると，$m(a-b)=1$ より，$m=\frac{1}{a-b}$ となり，$t=\frac{a}{a-b}$，$u=\frac{c}{a-b}$ から，

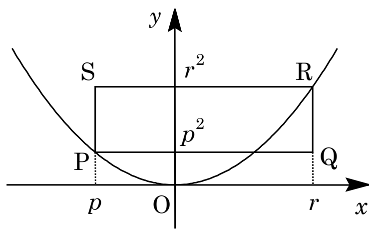
$$\mathrm{T}\left(-\frac{a}{a-b},\ -\frac{b}{a-b},\ 0\right),\ \mathrm{U}\left(0,\ 0,\ \frac{c}{a-b}\right)$$

［解　説］

同じような問題が 3 題も続きます。上の解答例は，意味を考えずに，ただ計算を行ったにすぎません。

2

問題のページへ



$-r<p<r$ より，$r^2-p^2=(r+p)(r-p)>0$ となるので，長方形 PQRS の面積 A は，

$$A=(r-p)(r^2-p^2)\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$\mathrm{PR}=1$ より，

$$(r-p)^2+(r^2-p^2)^2=1\cdots\cdots\cdots②$$

相加平均と相乗平均の関係を用いると，①②から，

$$A=\sqrt{(r-p)^2(r^2-p^2)^2}\leqq\frac{1}{2}\{(r-p)^2+(r^2-p^2)^2\}=\frac{1}{2}$$

等号成立は，$(r-p)^2=(r^2-p^2)^2=\dfrac{1}{2}$ のときである。すなわち，

$$r-p=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdots\cdots\cdots③,\quad r^2-p^2=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdots\cdots\cdots④$$

④より，$(r+p)(r-p)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となり，③を代入すると，$r+p=1\cdots\cdots\cdots⑤$

すると，③⑤より，$p=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$，$r=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$ となり，このとき，A は最大値 $\dfrac{1}{2}$ をとる。

［解　説］

相加平均と相乗平均の関係を利用すると，スッキリと解ける問題です。なお，対角線のなす角に注目する別解も考えられます。

3

問題のページへ

(1)　2 次以下の多項式$f(x)$に対し，曲線$y=f(x)$が点$(0,\ 0)$を通ることより，

$$f(x)=ax^2+bx\quad (a,\ b \text{ は定数})$$

さらに，点$(c,\ c^3-2c)$，$(1,\ -1)$も通るので，$f(c)=c^3-2c$，$f(1)=-1$となり，

$$ac^2+bc=c^3-2c\cdots\cdots\text{①},\quad a+b=-1\cdots\cdots\text{②}$$

$0<c<1$から，①より$ac+b=c^2-2$となり，②と合わせて，

$$ac-a=c^2-1,\quad a(c-1)=(c+1)(c-1)$$

よって，$a=c+1$，$b=-1-(c+1)=-c-2$となるので，

$$f(x)=(c+1)x^2-(c+2)x$$

(2)　$y=(c+1)x^2-(c+2)x$と$y=x^3-2x$を連立すると，

$$x^3-2x=(c+1)x^2-(c+2)x,\quad x^3-(c+1)x^2+cx=0$$

すると，$x(x-c)(x-1)=0$より$x=0,\ c,\ 1$となり，2 曲線で囲まれた部分の面積Sは，$0<x<c$で$x(x-c)(x-1)>0$，$c<x<1$で$x(x-c)(x-1)<0$から，

$$S=\int_0^c x(x-c)(x-1)dx+\int_c^1 -x(x-c)(x-1)dx$$

$$=\Big[\frac{x^4}{4}-\frac{c+1}{3}x^3+\frac{c}{2}x^2\Big]_0^c-\Big[\frac{x^4}{4}-\frac{c+1}{3}x^3+\frac{c}{2}x^2\Big]_c^1$$

$$=\frac{c^4}{4}-\frac{c^4+c^3}{3}+\frac{c^3}{2}-\frac{1}{4}(1-c^4)+\frac{c+1}{3}(1-c^3)-\frac{c}{2}(1-c^2)$$

$$=-\frac{c^4}{6}+\frac{c^3}{3}-\frac{c}{6}+\frac{1}{12}$$

(3)　(2)より，$S'=-\frac{2}{3}c^3+c^2-\frac{1}{6}=-\frac{1}{6}(2c-1)(2c^2-2c-1)$

ここで，$S'=0$の解は$c=\frac{1}{2},\ \frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$なので，$0<c<1$における$S$の値の増減は，右表のようになる。

c	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
S'		$-$	0	$+$	
S		$\searrow$		$\nearrow$	

これより，$c=\frac{1}{2}$のときSは最小になる。

［解　説］

微積分に関する標準的な問題です。(2)では，図が描きにくいので，式を基準として考えた方が明快でしょう。

4

問題のページへ

(1)　$f(x)=a\cos x+b$ に対して，対称性を考えると，

$$\int_0^{\pi} f(x)dx=\int_0^{\pi}(a\cos x+b)dx=b\int_0^{\pi}dx=b\pi$$

$$\int_0^{\pi}\{f(x)\}^3dx=\int_0^{\pi}(a^3\cos^3x+3a^2b\cos^2x+3ab^2\cos x+b^3)dx$$

$$=\int_0^{\pi}(3a^2b\cos^2x+b^3)dx=\int_0^{\pi}\left\{\frac{3a^2b}{2}(1+\cos 2x)+b^3\right\}dx$$

$$=\left(\frac{3a^2b}{2}+b^3\right)\int_0^{\pi}dx=\left(\frac{3a^2b}{2}+b^3\right)\pi$$

条件から，$\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{\pi}{4}+\int_0^{\pi}\{f(x)\}^3dx$ より，$b\pi=\dfrac{\pi}{4}+\left(\dfrac{3a^2b}{2}+b^3\right)\pi$

$$4b=1+6a^2b+4b^3,\ 4b^3+2(3a^2-2)b+1=0\cdots\cdots\cdots(*)$$

(2)　$g(b)=4b^3+2(3a^2-2)b+1$ とおくと，$(*)$は $g(b)=0$ となり，

$$g'(b)=12b^2+2(3a^2-2)=2\{6b^2+(3a^2-2)\}$$

(i)　$3a^2-2\geqq 0\left(a\leqq-\dfrac{2}{\sqrt{3}},\ \dfrac{2}{\sqrt{3}}\leqq a\right)$のとき

$g'(b)\geqq 0$ より，$b>0$ において $g(b)\geqq g(0)=1$ となり，$(*)$を満たす $b>0$ は存在しない。

(ii)　$3a^2-2<0\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}<a<\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$のとき

$b>0$ のとき，$g'(b)=0$ の解は $b=\sqrt{\dfrac{2-3a^2}{6}}$ であり，$\alpha=\sqrt{\dfrac{2-3a^2}{6}}$ とおくと，$g(b)$ の増減は右表のようになる。

b	0	$\cdots$	α	$\cdots$
$g'(b)$		$-$	0	$+$
$g(b)$	1	↘		↗

これより，$(*)$を満たす $b>0$ が存在する条件は $g(\alpha)\leqq 0$ であり，

$$g(\alpha)=4\cdot\frac{2-3a^2}{6}\sqrt{\frac{2-3a^2}{6}}+2(3a^2-2)\sqrt{\frac{2-3a^2}{6}}+1$$

$$=-\frac{4}{3}(2-3a^2)\sqrt{\frac{2-3a^2}{6}}+1$$

よって，$(2-3a^2)\sqrt{2-3a^2}\geqq\dfrac{3}{4}\sqrt{6}$ から $(2-3a^2)^3\geqq\dfrac{27}{8}$，すなわち $2-3a^2\geqq\dfrac{3}{2}$

すると，$6a^2-1\leqq 0$ となり，$-\dfrac{1}{\sqrt{6}}\leqq a\leqq\dfrac{1}{\sqrt{6}}$　$\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}<a<\dfrac{2}{\sqrt{3}}\text{を満たす}\right)$

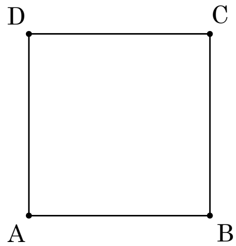
(i)(ii)より，求める a の条件は，$-\dfrac{1}{\sqrt{6}}\leqq a\leqq\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

［解　説］

前問と同様，計算主体の微積分の標準的な問題が続きます。

$\boxed{5}$

問題のページへ



(1)　条件より，動点 P は A から出発し，さいころをふって，横方向に移動する確率が$\dfrac{1}{3}$，縦方向に移動する確率が$\dfrac{2}{3}$である。

さて，P が 2 回の移動後 A にいるのは，A→B→A，A→D→A のいずれかなので，その確率a_1は，

$$a_1=\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$$

(2)　さいころを $2n$ 回ふった後，動点 P は A または C にいることを，数学的帰納法を利用して示す。

(i)　$n=1$のとき　A→B→A, A→D→A, A→B→C, A→D→C より成立する。

(ii)　$n=k$のとき　動点 P は A または C にいると仮定する。

このとき，さらに 2 回移動すると, A→B→A, A→D→A, A→B→C, A→D→C, C→B→C, C→D→C, C→B→A, C→D→A となり，さいころを$2(k+1)$回ふった後も，動点 P は A または C にいる。

(i)(ii)より，さいころを $2n$ 回ふった後，動点 P は A または C にいる。

(3)　(1)と同様にして, C→B→A, C→D→A の確率は，$\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{9}$となる。

さて，さいころを $2n$ 回ふった後，P が A，C にいる確率a_n，c_nについて，

$$a_{n+1}=\frac{5}{9}a_n+\frac{4}{9}c_n\cdots\cdots\cdots①$$

また，(2)より，$a_n+c_n=1\cdots\cdots\cdots②$

①②より，$a_{n+1}=\dfrac{5}{9}a_n+\dfrac{4}{9}(1-a_n)=\dfrac{1}{9}a_n+\dfrac{4}{9}$となり，

$$a_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{9}\left(a_n-\frac{1}{2}\right)$$

よって，$a_n-\dfrac{1}{2}=\left(a_1-\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{9}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{18}\left(\dfrac{1}{9}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{9}\right)^{n}$から，

$$a_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}\right)^n,\quad c_n=1-a_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}\right)^n$$

(4)　(3)より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}c_n=\frac{1}{2}$

［解　説］

よく見かける確率と漸化式の融合問題です。ただ，(2)はどのように記述すればよいのか迷います。「明らか」では明らかにマズイでしょうし。