1

解答解説のページへ

2 次方程式 $x^2-x-1=0$ の 2 つの解を α，β とし，

$$c_n=\alpha^n+\beta^n,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

とおく。以下の問いに答えよ。

(1) n を 2 以上の自然数とするとき，$c_{n+1}=c_n+c_{n-1}$ となることを示せ。

(2) 曲線 $y=c_1x^3-c_3x^2-c_2x+c_4$ の極値を求めよ。

(3) 曲線 $y=c_1x^2-c_3x+c_2$ と，x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

2

解答解説のページへ

$m,\ n\,(m<n)$ を自然数とし，$a=n^2-m^2$，$b=2mn$，$c=n^2+m^2$ とおく。3 辺の長さが $a,\ b,\ c$ である三角形の内接円の半径を r とし，その三角形の面積を S とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$a^2+b^2=c^2$ を示せ。

(2)　r を $m,\ n$ を用いて表せ。

(3)　r が素数のときに，S を r を用いて表せ。

(4)　r が素数のときに，S が 6 で割り切れることを示せ。

3

解答解説のページへ

空間において，原点 O を通らない平面 α 上に 1 辺の長さ 1 の正方形があり，その頂点を順に A, B, C, D とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ。

(2)　$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$ のとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ が，平面 α と垂直であることを示せ。

1　　問題のページへ

(1)　α，β は，$x^2-x-1=0$ の解より，$\alpha^2-\alpha-1=0$，$\beta^2-\beta-1=0$ となり，

$$\alpha^{n+1}=\alpha^n+\alpha^{n-1},\ \beta^{n+1}=\beta^n+\beta^{n-1}\quad(n\geqq 2)$$

すると，$\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}=(\alpha^n+\beta^n)+(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})$ より，$c_{n+1}=c_n+c_{n-1}$

(2)　まず, 解と係数の関係より，

$$c_1=\alpha+\beta=1,\ c_2=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1-2\cdot(-1)=3$$

(1)より，$c_3=c_2+c_1=3+1=4$，$c_4=c_3+c_2=4+3=7$ となり，

$$y=c_1x^3-c_3x^2-c_2x+c_4=x^3-4x^2-3x+7$$

$$y'=3x^2-8x-3=(3x+1)(x-3)$$

すると，右表より，y は $x=-\dfrac{1}{3}$ のとき極大値 $\dfrac{203}{27}$ をとり，$x=3$ のとき極小値 -11 をとる。

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	$\frac{203}{27}$	$\searrow$	-11	$\nearrow$

(3)　$y=c_1x^2-c_3x+c_2$ は，(2)より，$y=x^2-4x-3=(x-1)(x-3)$ となり，x 軸とで囲まれた図形の面積 S は,

$$S=-\int_1^3(x-1)(x-3)\,dx=\frac{1}{6}(3-1)^3=\frac{4}{3}$$

［解 説］

数列と微積分の 2 つの分野から構成された基本的な問題です。(2)と(3)については, 係数が簡単でしたので, まずそれを代入して計算をしています。

２

問題のページへ

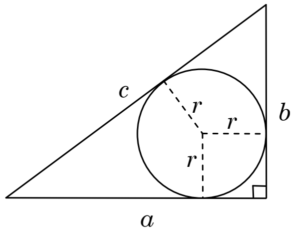
(1)　$a^2+b^2=(n^2-m^2)^2+(2mn)^2=n^4+2m^2n^2+m^4=(n^2+m^2)^2=c^2$

(2)　(1)より, 3 辺の長さが a, b, c の三角形は, 斜辺の長さが c の直角三角形なので, 内接円の半径を r とすると,

$$(a-r)+(b-r)=c$$

$$r=\frac{1}{2}(a+b-c)=\frac{1}{2}(n^2-m^2+2mn-n^2-m^2)$$

$$=mn-m^2=m(n-m)\cdots\cdots\cdots(*)$$



(3)　まず, 三角形の面積 S は, $S=\frac{1}{2}ab=mn(n^2-m^2)$

r が素数のとき, $(*)$より, $(m,\ n-m)=(1,\ r)$, $(r,\ 1)$

(i)　$(m,\ n-m)=(1,\ r)$ のとき　$n-1=r$ から, $n=r+1$

$$S=1\cdot(r+1)\{(r+1)^2-1\}=r(r+1)(r+2)$$

(ii)　$(m,\ n-m)=(r,\ 1)$ のとき　$n-r=1$ から, $n=r+1$

$$S=r(r+1)\{(r+1)^2-r^2\}=r(r+1)(2r+1)$$

(4)　(i)　$S=r(r+1)(r+2)$ のとき

S は連続する 3 つの自然数の積なので, 6 の倍数である。

(ii)　$S=r(r+1)(2r+1)$ のとき

$$S=r(r+1)(r-1+r+2)=(r-1)r(r+1)+r(r+1)(r+2)$$

S は連続する 3 つの自然数の積の和なので, 6 の倍数である。

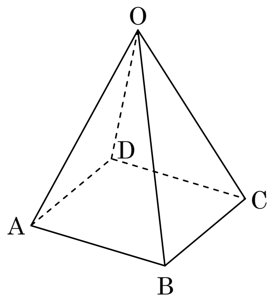
(i)(ii)より, いずれの場合も, S は 6 で割り切れる。

［解　説］

直角三角形の内接円を題材にした頻出問題です。(4)の(ii)は式変形で示しましたが, 普通に, 3 で割った余りに着目して場合分けをする方法でも簡単に示せます。

3

問題のページへ



(1)　正方形 ABCD に対して,

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdots\cdots\cdots①$$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とおくと，①より,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$
$$=2(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})$$

すると，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$ から,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=2(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot(-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})$$
$$=-2(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2)=0\cdots\cdots\cdots②$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=2(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot(-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$
$$=-2(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}})$$
$$=-2(|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})=0$ となり,

$$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0\cdots\cdots\cdots⑤$

よって，②⑤より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は平面 α 上の平行でない 2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と垂直になるので，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は平面 α と垂直である。

［解 説］

(2)を図形的に考えると，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}$ から点 O は線分 AB の垂直二等分面上，$\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$ から線分 BC の垂直二等分面上，すると点 O はこの 2 つの平面の交線上の点となります。ここで，正方形 ABCD の中心 H とおくと $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は平面 α に垂直になり，また $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=4\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ であることから題意成立です。ただ，どちらにせよ，不思議なことは「1 辺の長さ 1 の正方形」という条件をストレートに利用していないことです。