1　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　解答解説のページへ

a を実数とし，$f(x)=xe^x-x^2-ax$ とする。曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(0,\ f(0))$ における接線の傾きを -1 とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　a の値を求めよ。

(2)　関数 $y=f(x)$ の極値を求めよ。

(3)　b を実数とするとき，2 つの曲線 $y=xe^x$ と $y=x^2+ax+b$ の $-1\leqq x\leqq 1$ の範囲での共有点の個数を調べよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

$m,\ n\,(m<n)$ を自然数とし，$a=n^2-m^2$，$b=2mn$，$c=n^2+m^2$ とおく。3 辺の長さが $a,\ b,\ c$ である三角形の内接円の半径を r とし，その三角形の面積を S とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$a^2+b^2=c^2$ を示せ。

(2)　r を $m,\ n$ を用いて表せ。

(3)　r が素数のときに，S を r を用いて表せ。

(4)　r が素数のときに，S が 6 で割り切れることを示せ。

3　　解答解説のページへ

空間において，原点 O を通らない平面α上に 1 辺の長さ 1 の正方形があり，その頂点を順に A, B, C, D とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$を，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$を用いて表せ。

(2)　$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$ のとき，ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}$が，平面$\alpha$と垂直であることを示せ。

4

解答解説のページへ

n を自然数とする。1 から $2n$ までの番号をつけた $2n$ 枚のカードを袋に入れ，よくかき混ぜて n 枚を取り出し，取り出した n 枚のカードの数字の合計を A，残された n 枚のカードの数字の合計を B とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) n が奇数のとき，A と B が等しくないことを示せ。

(2) n が偶数のとき，A と B の差は偶数であることを示せ。

(3) $n=4$ のとき，A と B が等しい確率を求めよ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

$a,\ b$ を正の実数とし，xy 平面上に 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(a,\ 0)$，$\mathrm{B}(a,\ b)$ をとる。三角形 OAB を，原点 O を中心に $90°$ 回転するとき，三角形 OAB が通過してできる図形を D とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) D を xy 平面上に図示せよ。

(2) D を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

(3) $a+b=1$ のとき，(2)で求めた V の最小値と，そのときの a の値を求めよ。

1

問題のページへ

(1) $f(x)=xe^x-x^2-ax$ に対して，$f'(x)=e^x+xe^x-2x-a=(1+x)e^x-2x-a$
条件より，$f'(0)=-1$ なので，$1-a=-1$ となり，$a=2$

(2) (1)より，$f(x)=xe^x-x^2-2x$，$f'(x)=(1+x)e^x-2x-2=(1+x)(e^x-2)$
すると，$f(x)$ の増減は右表のようになり，$x=-1$ で極大値 $1-\dfrac{1}{e}$，$x=\log 2$ で極小値 $-(\log 2)^2$ をとる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\log 2$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$1-\dfrac{1}{e}$	$\searrow$	$-(\log 2)^2$	$\nearrow$

(3) まず，$y=xe^x$ と $y=x^2+2x+b$ の共有点の個数は，$xe^x=x^2+2x+b$ すなわち $f(x)=b$ の異なる実数解の個数に等しい。さらに，これは $y=f(x)$ と $y=b$ の共有点の個数に一致する。

さて，$\log 2<1$ より $-1\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	-1	$\cdots$	$\log 2$	$\cdots$	1
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$1-\dfrac{1}{e}$	$\searrow$	$-(\log 2)^2$	$\nearrow$	$e-3$

よって求める共有点の個数は，$b<-(\log 2)^2$，$1-\dfrac{1}{e}<b$ のとき 0 個，$b=-(\log 2)^2$，$e-3<b\leqq 1-\dfrac{1}{e}$ のとき 1 個，$-(\log 2)^2<b\leqq e-3$ のとき 2 個である。

［解 説］

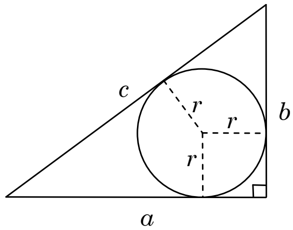
曲線の共有点の個数を異なる実数解の個数に翻訳する超頻出問題で，わかりやすい誘導がついています。

2

問題のページへ

(1)　$a^2+b^2=(n^2-m^2)^2+(2mn)^2=n^4+2m^2n^2+m^4=(n^2+m^2)^2=c^2$

(2)　(1)より，3 辺の長さが $a,\ b,\ c$ の三角形は，斜辺の長さが c の直角三角形なので，内接円の半径を r とすると，



$$(a-r)+(b-r)=c$$

$$r=\frac{1}{2}(a+b-c)=\frac{1}{2}(n^2-m^2+2mn-n^2-m^2)$$

$$=mn-m^2=m(n-m)\cdots\cdots\cdots(*)$$

(3)　まず，三角形の面積 S は，$S=\frac{1}{2}ab=mn(n^2-m^2)$

r が素数のとき，$(*)$より，$(m,\ n-m)=(1,\ r)$，$(r,\ 1)$

(i)　$(m,\ n-m)=(1,\ r)$ のとき　$n-1=r$ から，$n=r+1$

$$S=1\cdot(r+1)\{(r+1)^2-1\}=r(r+1)(r+2)$$

(ii)　$(m,\ n-m)=(r,\ 1)$ のとき　$n-r=1$ から，$n=r+1$

$$S=r(r+1)\{(r+1)^2-r^2\}=r(r+1)(2r+1)$$

(4)　(i)　$S=r(r+1)(r+2)$ のとき

S は連続する 3 つの自然数の積なので，6 の倍数である。

(ii)　$S=r(r+1)(2r+1)$ のとき

$$S=r(r+1)(r-1+r+2)=(r-1)r(r+1)+r(r+1)(r+2)$$

S は連続する 3 つの自然数の積の和なので，6 の倍数である。

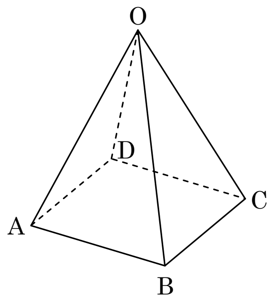
(i)(ii)より，いずれの場合も，S は 6 で割り切れる。

［解　説］

直角三角形の内接円を題材にした頻出問題です。(4)の(ii)は式変形で示しましたが，普通に，3 で割った余りに着目して場合分けをする方法でも簡単に示せます。

3

問題のページへ



(1)　正方形 ABCD に対して，

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\cdots\cdots\cdots①$$

(2)　$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$ とおくと，①より，

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$
$$=2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})$$

すると，$OA=OB=OC$ から，

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AC}=2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})\cdot(-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})$$
$$=-2(|\overrightarrow{OA}|^2-|\overrightarrow{OC}|^2)=0\cdots\cdots\cdots②$$
$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})\cdot(-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$$
$$=-2(|\overrightarrow{OA}|^2-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC})$$
$$=-2(|\overrightarrow{OB}|^2-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC})\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$\overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{BC}$ より，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})=0$ となり，

$$|\overrightarrow{OB}|^2-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=0\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=0\cdots\cdots\cdots⑤$

よって，②⑤より，$\overrightarrow{OP}$ は平面 α 上の平行でない 2 つのベクトル $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ と垂直になるので，$\overrightarrow{OP}$ は平面 α と垂直である。

［解　説］

(2)を図形的に考えると，$OA=OB$ から点 O は線分 AB の垂直二等分面上，$OB=OC$ から線分 BC の垂直二等分面上，すると点 O はこの 2 つの平面の交線上の点となります。ここで，正方形 ABCD の中心 H とおくと $\overrightarrow{OH}$ は平面 α に垂直になり，また $\overrightarrow{OP}=4\overrightarrow{OH}$ であることから題意成立です。ただ，どちらにせよ，不思議なことは「1 辺の長さ 1 の正方形」という条件をストレートに利用していないことです。

$\boxed{4}$ 問題のページへ

(1)　1 から $2n$ までの番号をつけた $2n$ 枚のカードの数字の和は,

$$A+B=1+2+\cdots+2n=\frac{1}{2}\cdot 2n(2n+1)=n(2n+1)\cdots\cdots\cdots①$$

さて, n が奇数のとき，$A=B$ とすると，①より $2A=n(2n+1)\cdots\cdots\cdots②$

②の左辺は偶数, 右辺は奇数より成立しない。よって, A と B は等しくない。

(2)　n が偶数のとき，$A-B=k$ とおくと，①より,

$$2A=n(2n+1)+k,\ \ k=-n(2n+1)+2A$$

すると，$n(2n+1)$, $2A$ はともに偶数なので, A と B の差 k は偶数である。

(3)　まず，$n=4$ のとき，1 から 8 までの番号をつけた 8 枚のカードから 4 枚を取り出す場合の数は，${}_8\mathrm{C}_4=70$ である。

さて，①より $A+B=4\times 9=36$ なので，$A=B$ となるのは $A=18$ のときであり，取り出す 4 枚のカードの数字を $p, q, r, s\,(1\leqq p<q<r<s\leqq 8)$ とおくと,

$$p+q+r+s=18\cdots\cdots\cdots③$$

すると，$18<s+s+s+s=4s$ から $s>\dfrac{9}{2}$ となり，$s=5,\ 6,\ 7,\ 8$

(i)　$s=5$ のとき　③より，$p+q+r=13\ (1\leqq p<q<r\leqq 4)$

このとき，満たす $(p,\ q,\ r)$ は存在しない。

(ii)　$s=6$ のとき　③より，$p+q+r=12\ (1\leqq p<q<r\leqq 5)$

このとき，$(p,\ q,\ r)=(3,\ 4,\ 5)$

(iii)　$s=7$ のとき　③より，$p+q+r=11\ (1\leqq p<q<r\leqq 6)$

このとき，$(p,\ q,\ r)=(1,\ 4,\ 6),\ (2,\ 3,\ 6),\ (2,\ 4,\ 5)$

(iv)　$s=8$ のとき　③より，$p+q+r=10\ (1\leqq p<q<r\leqq 7)$

このとき，$(p,\ q,\ r)=(1,\ 2,\ 7),\ (1,\ 3,\ 6),\ (1,\ 4,\ 5),\ (2,\ 3,\ 5)$

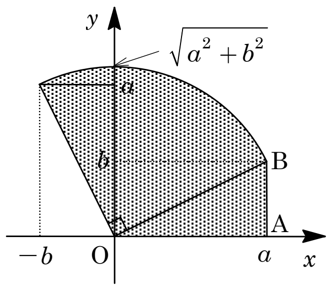
(i)～(iv)より，求める場合は $1+3+4=8$ 通りとなり，その確率は $\dfrac{8}{70}=\dfrac{4}{35}$ である。

［解 説］

場合の数と確率の基本問題です。(1)と(2)は，$A+B$ を考えるのがポイントです。(3)は，場合分けをして丁寧に数え上げましたが，いきなり網羅していってもよいでしょう。

5

問題のページへ



(1) 3 点 $O(0,\ 0)$，$A(a,\ 0)$，$B(a,\ b)$ に対し，$\triangle OAB$ を O を中心に $90°$ 回転するとき，$\triangle OAB$ が通過してできる図形 D を図示すると，右図の網点部となる。

(2) 点 B の軌跡は $-b \leqq x \leqq a$，$y>0$ において，

$$x^2+y^2=a^2+b^2,\ y=\sqrt{a^2+b^2-x^2}$$

すると，D を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V は，

$$V=\pi\int_{-b}^{a}(a^2+b^2-x^2)dx-\frac{1}{3}\pi a^2b=\pi\Big[(a^2+b^2)x-\frac{1}{3}x^3\Big]_{-b}^{a}-\frac{1}{3}\pi a^2b$$

$$=\pi(a^2+b^2)(a+b)-\frac{1}{3}\pi(a^3+b^3)-\frac{1}{3}\pi a^2b$$

$$=\frac{1}{3}\pi(2a^3+2a^2b+3ab^2+2b^3)$$

(3) $a>0$，$b>0$，$a+b=1$ より，$b=1-a$　$(0<a<1)$ となり，(2)より，

$$V=\frac{1}{3}\pi\{2a^3+2a^2(1-a)+3a(1-a)^2+2(1-a)^3\}$$

$$=\frac{1}{3}\pi(a^3+2a^2-3a+2)$$

ここで，$f(a)=a^3+2a^2-3a+2$ とおくと，$V=\frac{1}{3}\pi f(a)$ となり，

$$f'(a)=3a^2+4a-3$$

$f'(a)=0$ の解は，$0<a<1$ から，$a=\frac{-2+\sqrt{13}}{3}$

すると，$f(a)$ の増減は右表のようになり，$f(a)$ は $a=\frac{-2+\sqrt{13}}{3}$ のとき最小値をとる。

a	0	$\cdots$	$\frac{-2+\sqrt{13}}{3}$	$\cdots$	1
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$		↘		↗	

さて，$f(a)$ を $f'(a)$ で割ると，

$$f(a)=f'(a)\Big(\frac{1}{3}a+\frac{2}{9}\Big)-\frac{26}{9}a+\frac{8}{3}$$

この式を利用すると，$f\Big(\frac{-2+\sqrt{13}}{3}\Big)=-\frac{26}{9}\cdot\frac{-2+\sqrt{13}}{3}+\frac{8}{3}=\frac{124-26\sqrt{13}}{27}$

よって，V は $a=\frac{-2+\sqrt{13}}{3}$ のとき，最小値 $\frac{124-26\sqrt{13}}{81}\pi$ をとる。

［解　説］

微分法を利用する最大・最小問題で，頻出タイプです。なお，解答例の極値を求める方法は必須技法です。