1

解答解説のページへ

s, t を $s<t$ を満たす実数とする。座標平面上の 3 点 $\mathrm{A}(1,\ 2)$，$\mathrm{B}(s,\ s^2)$，$\mathrm{C}(t,\ t^2)$ が一直線上にあるとする。以下の問いに答えよ。

(1) s と t の間の関係式を求めよ。

(2) 線分 BC の中点を $\mathrm{M}(u,\ v)$ とする。u と v の間の関係式を求めよ。

(3) s, t が変化するとき, v の最小値と, そのときの u, s, t の値を求めよ。

2　解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$が$a_1=5$，$b_1=7$を満たし，さらにすべての実数 x とすべての自然数nに対して

$$x(a_{n+1}x+b_{n+1})=\int_{c_n}^{x+c_n}(a_nt+b_n)dt$$

を満たすとする。以下の問いに答えよ。

(1)　数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(2)　$c_n=3^{n-1}$のとき，数列$\{b_n\}$の一般項を求めよ。

(3)　$c_n=n$のとき，数列$\{b_n\}$の一般項を求めよ。

3

解答解説のページへ

$a,\ b,\ c$ を 1 以上 7 以下の自然数とする。次の条件(＊)を考える。

(＊)　3 辺の長さが $a,\ b,\ c$ である三角形と，3 辺の長さが $\dfrac{1}{a},\ \dfrac{1}{b},\ \dfrac{1}{c}$ である三角形が両方とも存在する。

以下の問いに答えよ。

(1)　$a=b>c$ であり，かつ条件(＊)を満たす $a,\ b,\ c$ の組の個数を求めよ。

(2)　$a>b>c$ であり，かつ条件(＊)を満たす $a,\ b,\ c$ の組の個数を求めよ。

(3)　条件(＊)を満たす $a,\ b,\ c$ の組の個数を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　3 点 $\mathrm{A}(1,\ 2)$，$\mathrm{B}(s,\ s^2)$，$\mathrm{C}(t,\ t^2)$ が一直線上にあることより，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となり，
$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (s-1,\ s^2-2)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (t-1,\ t^2-2)$ から，

$$(s-1)(t^2-2)-(t-1)(s^2-2)=0,\ st(t-s)-(t^2-s^2)+2(t-s)=0$$

ここで，$s<t$ より $t-s>0$ となり，$st-(t+s)+2=0$ ………①

(2)　線分 BC の中点を $\mathrm{M}(u,\ v)$ とすると，$u=\dfrac{s+t}{2}$，$v=\dfrac{s^2+t^2}{2}$ となり，

$$s+t=2u \text{ ………②},\quad s^2+t^2=2v \text{ ………③}$$

②③より，$(2u)^2-2st=2v$ となり，$st=2u^2-v$ ………④

②④を①に代入すると，$2u^2-v-2u+2=0$，$v=2u^2-2u+2$ ………⑤

(3)　②④より，s，t は x についての 2 次方程式 $x^2-2ux+(2u^2-v)=0$ ……⑥の異なる 2 つの実数解より，

$$D/4=u^2-(2u^2-v)>0,\ v>u^2 \text{ ………⑦}$$

⑤⑦から，$2u^2-2u+2>u^2$，$u^2-2u+2>0$ となるが，この不等式の左辺は，$u^2-2u+2=(u-1)^2+1>0$ となり，つねに成立する。

よって，⑤より，$v=2\left(u-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{2}$ となり，$u=\dfrac{1}{2}$ のとき v は最小値 $\dfrac{3}{2}$ をとる。

このとき，⑥から，$s,\ t$ は $x^2-x-1=0$ の 2 つの解となり，$s<t$ より，

$$s=\frac{1-\sqrt{5}}{2},\ t=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

［解　説］

誘導が丁寧についている問題です。なお，点 $\mathrm{A}(1,\ 2)$ を通り，放物線 $y=x^2$ 上の異なる 2 点を結ぶ線分の中点 M の軌跡と考えると，⑦は明らかとなります。

2

問題のページへ

(1) すべての実数 x に対して，$x(a_{n+1}x+b_{n+1})=\int_{c_n}^{x+c_n}(a_nt+b_n)dt$ より，

$$a_{n+1}x^2+b_{n+1}x=\left[\frac{a_n}{2}t^2+b_nt\right]_{c_n}^{x+c_n}=\frac{a_n}{2}(x^2+2c_nx)+b_nx$$
$$=\frac{a_n}{2}x^2+(a_nc_n+b_n)x$$

よって，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}$ ……①，$b_{n+1}=a_nc_n+b_n$ ……②

すると，①より，$a_1=5$ なので，$a_n=5\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ ………③

(2) $c_n=3^{n-1}$ のとき，②③より，$b_{n+1}=5\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}+b_n$ となり，$n\geqq 2$ で，

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}5\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}=7+5\cdot\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1}{\frac{3}{2}-1}=10\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-3$$

なお，この式は $n=1$ のときも成立する。

(3) $c_n=n$ のとき，②③より，$b_{n+1}=5n\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+b_n$ となり，$n\geqq 2$ で，

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}5k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=7+5\sum_{k=1}^{n-1}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

ここで，$S=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ とおくと，

$$S-\frac{1}{2}S=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}-(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}-(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2-(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって，$S=4-2(n+1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=4-(n+1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$ となり，

$$b_n=7+5\left\{4-(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}=27-5(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

なお，この式は $n=1$ のときも成立する。

［解　説］

いかめしい設定ですが，内容は漸化式を解くことだけです。また，複雑な式変形を要求されることもなく，ミスに要注意というレベルです。

3　問題のページへ

(1)　条件より，a, b, c は 1 以上 7 以下の自然数である。

さて，$a=b>c$ のとき，$\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{c}$ となり，$a+b>c$，$b+c>a$，$c+a>b$，$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}>\dfrac{1}{a}$，$\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$ は，すべて満たされている。

すると，(*)を満たす条件は，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{c}$ であり，$a=b>c$ から $\dfrac{2}{a}>\dfrac{1}{c}$ となる。

これより，$(a,\ c)$ の条件は，$a>c$ かつ $a<2c$ より，$c<a<2c$ となり，

$(a,\ c)=(3,\ 2),\ (4,\ 3),\ (5,\ 3),\ (5,\ 4),\ (6,\ 4),\ (7,\ 4),$
$(6,\ 5),\ (7,\ 5),\ (7,\ 6)$

したがって，(*)を満たす $(a,\ b,\ c)$ の組は 9 個である。

(2)　$a>b>c$ のとき，$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{c}$ となり，$a+b>c$，$c+a>b$，$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}>\dfrac{1}{a}$，$\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$ は，すべて満たされている。

すると，(*)を満たす条件は，$b+c>a$ ……①かつ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{c}$ ……②である。

まず，①より $b>a-c$，②より $\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{a}=\dfrac{a-c}{ac}$ すなわち $b<\dfrac{ac}{a-c}$ となり，

$$a-c<b<\frac{ac}{a-c}\ \cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$a>b>c$ から $2\leqq b\leqq 6$，また $a-c\geqq 2$ に注意すると，$3\leqq b\leqq 6$ となる。

(i)　$b=3$ のとき　$a>3>c$ であり，③より $a-c=2$ かつ $ac>6$ となり，
$(a,\ c)=(4,\ 2)$

(ii)　$b=4$ のとき　$a>4>c$ であり，③より $a-c<4<\dfrac{ac}{a-c}$

(a)　$a-c=2$ かつ $ac>8$ のとき　$(a,\ c)=(5,\ 3)$

(b)　$a-c=3$ かつ $ac>12$ のとき　$(a,\ c)=(6,\ 3)$

(iii)　$b=5$ のとき　$a>5>c$ であり，③より $a-c<5<\dfrac{ac}{a-c}$

(a)　$a-c=2$ かつ $ac>10$ のとき　$(a,\ c)=(6,\ 4)$

(b)　$a-c=3$ かつ $ac>15$ のとき　$(a,\ c)=(6,\ 3),\ (7,\ 4)$

(c)　$a-c=4$ かつ $ac>20$ のとき　$(a,\ c)=(7,\ 3)$

(iv)　$b=6$ のとき　$a>6>c$ であり，③より $a-c<6<\dfrac{ac}{a-c}$

(a)　$a-c=2$ かつ $ac>12$ のとき　$(a,\ c)=(7,\ 5)$

(b)　$a-c=3$ かつ $ac>18$ のとき　$(a,\ c)=(7,\ 4)$

(c)　$a-c=4$ かつ $ac>24$ のとき　この場合を満たす $(a,\ c)$ は存在しない。

(d)　$a-c=5$ かつ $ac>30$ のとき　この場合を満たす $(a,\ c)$ は存在しない。

(i)～(iv)より, (＊)を満たす$(a,\ b,\ c)$の組は 9 個である。

(3) まず$a>b=c$のとき，$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}$となり，$a+b>c$，$c+a>b$，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{c}$，$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}>\dfrac{1}{a}$，$\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$は，すべて満たされている。

すると，(＊)を満たす条件は，$b+c>a$であり，$a>b=c$から$2c>a$となる。

これより，$(a,\ c)$の条件は，$a>c$かつ$a<2c$より$c<a<2c$となり，(1)の結果から，(＊)を満たす$(a,\ b,\ c)$の組は 9 個である。

次に，$a=b=c$のとき，$\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}$となり，(＊)を満たす$(a,\ b,\ c)$の組は明らかに 7 個である。

以上より，a, b, cの大小関係も考えて，条件(＊)を満たす$(a,\ b,\ c)$の組の個数は，

$$9\times3+9\times3!+9\times3+7=115$$

［解　説］

忍耐強く解いていくタイプの問題です。特に，(2)については，解答例では b の値で場合分けをしましたが，a や c の値でもさほど変わりません。途中で浮気心が出てしまうとマズイことになります。