1

解答解説のページへ

座標平面上の 2 つの曲線 $y=\dfrac{x-3}{x-4}$，$y=\dfrac{1}{4}(x-1)(x-3)$ をそれぞれ C_1，C_2 とする。以下の問いに答えよ。

(1)　2 曲線 C_1，C_2 の交点をすべて求めよ。

(2)　2 曲線 C_1，C_2 の概形をかき，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

座標平面上の楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を C とする。$a>2$，$0<\theta<\pi$ とし，x 軸上の点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ と楕円 C 上の点 $\mathrm{P}(2\cos\theta,\ \sin\theta)$ をとる。原点を O とし，直線 AP と y 軸との交点を Q とする。点 Q を通り x 軸に平行な直線と，直線 OP との交点を R とする。以下の問いに答えよ。

(1)　点 R の座標を求めよ。

(2)　(1)で求めた点 R の y 座標を $f(\theta)$ とする。このとき，$0<\theta<\pi$ における $f(\theta)$ の最大値を求めよ。

(3)　原点 O と点 R の距離の 2 乗を $g(\theta)$ とする。このとき，$0<\theta<\pi$ における $g(\theta)$ の最小値を求めよ。

3　　解答解説のページへ

a を正の実数とする。座標平面上の曲線 C を，$y=x^4-2(a+1)x^3+3ax^2$ で定める。曲線 C が 2 つの変曲点 P, Q をもち，それらの x 座標の差が $\sqrt{2}$ であるとする。以下の問いに答えよ。

(1)　a の値を求めよ。

(2)　線分 PQ の中点と x 座標が一致するような，C 上の点を R とする。三角形 PQR の面積を求めよ。

(3)　曲線 C 上の点 P における接線が P 以外で C と交わる点を P' とし，点 Q における接線が Q 以外で C と交わる点を Q' とする。線分 $\mathrm{P}'\mathrm{Q}'$ の中点の x 座標を求めよ。

4　　解答解説のページへ

$a,\ b$ を実数とし，自然数 k に対して $x_k=\dfrac{2ak+6b}{k(k+1)(k+3)}$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$x_k=\dfrac{p}{k}+\dfrac{q}{k+1}+\dfrac{r}{k+3}$ がすべての自然数 k について成り立つような実数 $p,\ q,\ r$ を，a, b を用いて表せ。

(2)　$b=0$ のとき，3 以上の自然数 n に対して $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_k$ を求めよ。また，$a=0$ のとき，4 以上の自然数 n に対して $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_k$ を求めよ。

(3)　無限級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}x_k$ の和を求めよ。

$\boxed{5}$　解答解説のページへ

a, b, c を 1 以上 7 以下の自然数とする。次の条件(＊)を考える。

(＊)　3 辺の長さが $a,\ b,\ c$ である三角形と，3 辺の長さが $\dfrac{1}{a},\ \dfrac{1}{b},\ \dfrac{1}{c}$ である三角形が両方とも存在する。

以下の問いに答えよ。

(1)　$a = b > c$ であり，かつ条件(＊)を満たす a, b, c の組の個数を求めよ。

(2)　$a > b > c$ であり，かつ条件(＊)を満たす a, b, c の組の個数を求めよ。

(3)　条件(＊)を満たす a, b, c の組の個数を求めよ。

1

問題のページへ

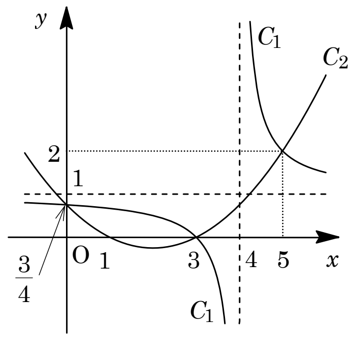
(1)　$C_1 : y=\dfrac{x-3}{x-4}$ ……①，$C_2 : y=\dfrac{1}{4}(x-1)(x-3)$ ……②を連立すると，

$$\frac{x-3}{x-4}=\frac{1}{4}(x-1)(x-3),\ \ 4(x-3)=(x-1)(x-3)(x-4)$$

これより，$(x-3)x(x-5)=0$ となり，$x=0,\ 3,\ 5$

すると，①より，C_1，C_2 の交点の座標は，$\left(0,\ \dfrac{3}{4}\right)$，$(3,\ 0)$，$(5,\ 2)$ である。

(2)　①より $y=1+\dfrac{1}{x-4}$，②より $y=\dfrac{1}{4}(x-2)^2-\dfrac{1}{4}$ となり，C_1，C_2 の概形は右図のようになる。



C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を S とすると，

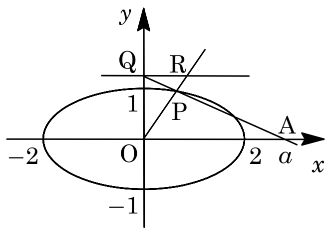
$$S=\int_0^3\left\{1+\frac{1}{x-4}-\frac{1}{4}(x-2)^2+\frac{1}{4}\right\}dx$$
$$=\left[\frac{5}{4}x+\log|x-4|-\frac{1}{12}(x-2)^3\right]_0^3$$
$$=\frac{15}{4}-\log 4-\frac{1}{12}(1+8)=3-2\log 2$$

［解 説］

微積分の基本問題です。複雑な計算もありません。

2

問題のページへ



(1) $A(a,\ 0)$，$P(2\cos\theta,\ \sin\theta)$ に対し，直線 AP の式は，

$$y=\frac{\sin\theta}{2\cos\theta-a}(x-a)$$

これより，$Q\Big(0,\ \dfrac{-a\sin\theta}{2\cos\theta-a}\Big)$ となり，Q を通り x 軸に平行な直線は，$y=\dfrac{-a\sin\theta}{2\cos\theta-a}$ ……①となる。

また，直線 OP の法線ベクトルの成分を $(\sin\theta,\ -2\cos\theta)$ とおくと，その式は，

$$x\sin\theta-2y\cos\theta=0\ \cdots\cdots②$$

①②を連立すると，$x\sin\theta=\dfrac{-2a\sin\theta\cos\theta}{2\cos\theta-a}$，$x=\dfrac{-2a\cos\theta}{2\cos\theta-a}$

よって，点 R の座標は，$\Big(\dfrac{-2a\cos\theta}{2\cos\theta-a},\ \dfrac{-a\sin\theta}{2\cos\theta-a}\Big)$ である。

(2) 点 R の y 座標 $f(\theta)$ は，(1)より，$f(\theta)=\dfrac{-a\sin\theta}{2\cos\theta-a}$ となり，

$$f'(\theta)=\frac{-a\cos\theta(2\cos\theta-a)+a\sin\theta\cdot(-2\sin\theta)}{(2\cos\theta-a)^2}=\frac{a(a\cos\theta-2)}{(2\cos\theta-a)^2}$$

ここで，$a>2$ から，$0<\dfrac{2}{a}<1$ となり，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ において $\cos\alpha=\dfrac{2}{a}$ となる α が 1 つ存在する。これより，$f(\theta)$ の増減は右表のようになり，$f(\theta)$ は $\theta=\alpha$ において最大となる。

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	π
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		↗		↘	

すると，$\sin\alpha=\sqrt{1-\dfrac{4}{a^2}}=\dfrac{\sqrt{a^2-4}}{a}$ となり，$f(\theta)$ の最大値は，

$$f(\alpha)=\frac{-a\sin\alpha}{2\cos\alpha-a}=\frac{-a\sqrt{a^2-4}}{4-a^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-4}}$$

(3) $$OR^2=\Big(\frac{-2a\cos\theta}{2\cos\theta-a}\Big)^2+\Big(\frac{-a\sin\theta}{2\cos\theta-a}\Big)^2=\frac{4a^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}{(2\cos\theta-a)^2}=\frac{a^2(1+3\cos^2\theta)}{(2\cos\theta-a)^2}$$

これより，$g(\theta)=\dfrac{a^2(1+3\cos^2\theta)}{(2\cos\theta-a)^2}$ と表せ，ここで $h(t)=\dfrac{1+3t^2}{(2t-a)^2}$ $(-1<t<1)$ とおくと，$g(\theta)=a^2h(t)$ となり，

$$h'(t)=\frac{6t(2t-a)^2-(1+3t^2)\cdot4(2t-a)}{(2t-a)^4}=\frac{6t(2t-a)-4(1+3t^2)}{(2t-a)^3}$$
$$=\frac{2(3at+2)}{(a-2t)^3}$$

すると，$-\dfrac{1}{3}<\dfrac{-2}{3a}<0$ から，$h(t)$ の増減は右表のようになる。

t	-1	$\cdots$	$\dfrac{-2}{3a}$	$\cdots$	1
$h'(t)$		$-$	0	$+$	
$h(t)$		↘		↗	

よって，$t=\dfrac{-2}{3a}$ のとき $h(t)$ は最小，このとき $g(\theta)$ も最小となり，最小値は，

$$a^2h\left(\frac{-2}{3a}\right)=a^2\cdot\frac{1+\dfrac{12}{9a^2}}{\left(-\dfrac{4}{3a}-a\right)^2}=a^2\cdot\frac{9a^2+12}{(4+3a^2)^2}=\frac{3a^2}{4+3a^2}$$

［解 説］

計算主体の問題です。(2)と(3)の 2 つの設問には，関係がとりたてて見出せません。そのため，計算量がかなり多めとなっています。なお，(3)の微分を θ で実行すると面倒なことになりそうなので，置き換えをしています。

3

問題のページへ

(1)　$C: y = x^4 - 2(a+1)x^3 + 3ax^2$ に対して，$y' = 2\{2x^3 - 3(a+1)x^2 + 3ax\}$

$$y'' = 6\{2x^2 - 2(a+1)x + a\}$$

そこで，$y'' = 0$ の解は $x = \dfrac{a+1 \pm \sqrt{a^2+1}}{2}$ となり，この値を $x = \alpha,\ \beta\ \ (\alpha < \beta)$ とおく。

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\cup$		$\cap$		$\cup$

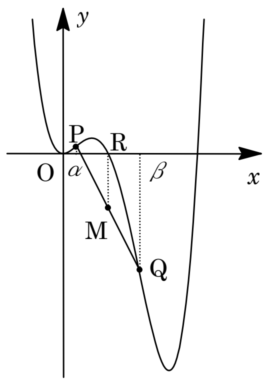
すると，曲線 C の凹凸は右表のようになり，$x = \alpha,\ \beta$ において変曲点をとる。

よって，条件 $\beta - \alpha = \sqrt{2}$ すなわち $\sqrt{a^2+1} = \sqrt{2}$ より，$a = 1\ (a > 0)$ である。

(2)　(1)より，$C: y = f(x)$ とおくと，$f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 = x^2(x-1)(x-3)$

$$f'(x) = 2(2x^3 - 6x^2 + 3x),\quad f''(x) = 6(2x^2 - 4x + 1)$$

ここで，$\mathrm{P}(\alpha,\ f(\alpha))$，$\mathrm{Q}(\beta,\ f(\beta))$ とおくと，解と係数の関係より，$\alpha + \beta = 2$，$\alpha\beta = \dfrac{1}{2}$ となる。



さて，$f''(\alpha) = f''(\beta) = 0$ から，$f(x)$ を $f''(x)$ で割ると，

$$f(x) = \frac{1}{6}f''(x)\left(\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{4}\right) + \left(-2x + \frac{3}{4}\right)$$

この式より，$f(\alpha) = -2\alpha + \dfrac{3}{4}$，$f(\beta) = -2\beta + \dfrac{3}{4}$ となり，$\mathrm{P}\left(\alpha,\ -2\alpha + \dfrac{3}{4}\right)$，$\mathrm{Q}\left(\beta,\ -2\beta + \dfrac{3}{4}\right)$ と表せる。そして，線分 PQ の中点を M とすると，その座標は，

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2} = 1,\quad y = \frac{1}{2}\left(-2\alpha + \frac{3}{4} - 2\beta + \frac{3}{4}\right) = -(\alpha+\beta) + \frac{3}{4} = -\frac{5}{4}$$

すると，$\mathrm{M}\left(1,\ -\dfrac{5}{4}\right)$ から，M と x 座標の等しい C 上の点 R は $\mathrm{R}(1,\ 0)$ となる。

よって，$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積は，$\mathrm{MR} = \dfrac{5}{4}$，$\beta - \alpha = \sqrt{2}$ より，$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{5}{4}\cdot\sqrt{2} = \dfrac{5}{8}\sqrt{2}$ である。

(3)　$C: y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(\alpha,\ f(\alpha))$ における接線は，$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$

ここで，$y = f(x)$ と $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x-\alpha)$ を連立すると，

$$f(x) - f(\alpha) = f'(\alpha)(x-\alpha),\quad f(x) - f'(\alpha)(x-\alpha) - f(\alpha) = 0$$

さて，$g(x) = f(x) - f'(\alpha)(x-\alpha) - f(\alpha)$ とおくと，

$$g'(x) = f'(x) - f'(\alpha),\quad g''(x) = f''(x)$$

これより，$g(\alpha) = g'(\alpha) = g''(\alpha) = 0$ となり，4 次関数 $g(x)$ は $(x-\alpha)^3$ という因数をもつ。そして，$g(x)$ のもう 1 つの因数を $(x - \alpha')$ とすると，

$$g(x) = k(x-\alpha)^3(x-\alpha')\ \ (k \text{ は実数})\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

そして，$g(x)$ の 4 次，3 次の係数は，それぞれ $f(x)$ の 4 次，3 次の係数に一致することより，$(*)$の右辺を展開すると，

$1 = k$，$-4 = k(-3\alpha - \alpha')$

これより，$-4 = -3\alpha - \alpha'$ である。さらに，条件より，点 P' の x 座標は α' となるので，$\alpha' = 4 - 3\alpha$ である。

また，点 $\mathrm{Q}(\beta,\ f(\beta))$ における接線についても同様に考えると，点 Q' の x 座標 β' は $\beta' = 4 - 3\beta$ である。

したがって，線分 $\mathrm{P}'\mathrm{Q}'$ の中点の x 座標は，

$$\frac{\alpha' + \beta'}{2} = \frac{8 - 3(\alpha + \beta)}{2} = \frac{8 - 3\cdot 2}{2} = 1$$

［解 説］

前問に引き続き，計算量がさらに過激になっています。解答例の流れから「$g(x)$ は $(x-\alpha)^3$ という因数をもつという証明」は省略していますが，必要であれば，因数定理を用いて，$g(\alpha) = g'(\alpha) = g''(\alpha) = 0$ と同値であることを示すことができます。

4

問題のページへ

(1) $x_k=\dfrac{2ak+6b}{k(k+1)(k+3)}$ に対して，$x_k=\dfrac{p}{k}+\dfrac{q}{k+1}+\dfrac{r}{k+3}$ より，

$$2ak+6b=p(k+1)(k+3)+qk(k+3)+rk(k+1)\cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$の 2 次，1 次の係数，および定数項を比較すると，

$$0=p+q+r,\ 2a=4p+3q+r,\ 6b=3p$$

よって，$p=2b$，$q=a-3b$，$r=-a+b$

(2) $b=0$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_k=S_1$ とおくと，(1)より $S_1=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{a}{k+1}-\frac{a}{k+3}\Big)$ となり，

$$S_1=a\Big\{\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\Big)+\Big(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\Big)+\cdots+\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\Big)+\Big(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\Big)\Big\}$$

$$=a\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\Big)=\frac{an(5n+13)}{6(n+2)(n+3)}$$

$a=0$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_k=S_2$ とおくと，(1)より $S_2=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{2b}{k}-\frac{3b}{k+1}+\frac{b}{k+3}\Big)$ となり，

$$S_2=b\sum_{k=1}^{n}\Big\{2\Big(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\Big)-\Big(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\Big)\Big\}=2b\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\Big)-\frac{b}{a}S_1$$

$$=2b\Big\{\Big(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\Big)+\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\Big)+\cdots+\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\Big)\Big\}-\frac{bn(5n+13)}{6(n+2)(n+3)}$$

$$=2b\Big(1-\frac{1}{n+1}\Big)-\frac{bn(5n+13)}{6(n+2)(n+3)}=\frac{2bn}{n+1}-\frac{bn(5n+13)}{6(n+2)(n+3)}$$

$$=\frac{bn(7n^2+42n+59)}{6(n+1)(n+2)(n+3)}$$

(3) $x_k=\dfrac{2ak}{k(k+1)(k+3)}+\dfrac{6b}{k(k+1)(k+3)}$ より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_k=S_1+S_2$ となり，

$$\sum_{k=1}^{\infty}x_k=\lim_{n\to\infty}(S_1+S_2)=\lim_{n\to\infty}\Big\{\frac{an(5n+13)}{6(n+2)(n+3)}+\frac{bn(7n^2+42n+59)}{6(n+1)(n+2)(n+3)}\Big\}$$

$n\to\infty$ のとき，$\dfrac{an(5n+13)}{6(n+2)(n+3)}=\dfrac{a\Big(5+\dfrac{13}{n}\Big)}{6\Big(1+\dfrac{2}{n}\Big)\Big(1+\dfrac{3}{n}\Big)}\to\dfrac{5a}{6}$

$$\frac{bn(7n^2+42n+59)}{6(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{b\Big(7+\dfrac{42}{n}+\dfrac{59}{n^2}\Big)}{6\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)\Big(1+\dfrac{2}{n}\Big)\Big(1+\dfrac{3}{n}\Big)}\to\frac{7b}{6}$$

よって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}x_k=\frac{5a}{6}+\frac{7b}{6}$ である。

［解 説］

無限級数を求める誘導つきの問題です。方針に迷いは生じないでしょう。

5　　問題のページへ

(1)　条件より, a, b, c は 1 以上 7 以下の自然数である。

さて, $a=b>c$ のとき, $\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{c}$ となり, $a+b>c$, $b+c>a$, $c+a>b$, $\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}>\dfrac{1}{a}$, $\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$ は, すべて満たされている。

すると, (＊)を満たす条件は, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{c}$ であり, $a=b>c$ から $\dfrac{2}{a}>\dfrac{1}{c}$ となる。

これより, $(a,\ c)$ の条件は, $a>c$ かつ $a<2c$ より, $c<a<2c$ となり,

$$(a,\ c)=(3,\ 2),\ (4,\ 3),\ (5,\ 3),\ (5,\ 4),\ (6,\ 4),\ (7,\ 4),\ (6,\ 5),\ (7,\ 5),\ (7,\ 6)$$

したがって, (＊)を満たす $(a,\ b,\ c)$ の組は 9 個である。

(2)　$a>b>c$ のとき, $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{c}$ となり, $a+b>c$, $c+a>b$, $\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}>\dfrac{1}{a}$, $\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$ は, すべて満たされている。

すると, (＊)を満たす条件は, $b+c>a$ ……①かつ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{c}$ ……②である。

まず, ①より $b>a-c$, ②より $\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{a}=\dfrac{a-c}{ac}$ すなわち $b<\dfrac{ac}{a-c}$ となり,

$$a-c<b<\frac{ac}{a-c}\ \cdots\cdots\cdots③$$

ここで, $a>b>c$ から $2\leqq b\leqq 6$, また $a-c\geqq 2$ に注意すると, $3\leqq b\leqq 6$ となる。

(i)　$b=3$ のとき　$a>3>c$ であり, ③より $a-c=2$ かつ $ac>6$ となり, $(a,\ c)=(4,\ 2)$

(ii)　$b=4$ のとき　$a>4>c$ であり, ③より $a-c<4<\dfrac{ac}{a-c}$

(a)　$a-c=2$ かつ $ac>8$ のとき　$(a,\ c)=(5,\ 3)$

(b)　$a-c=3$ かつ $ac>12$ のとき　$(a,\ c)=(6,\ 3)$

(iii)　$b=5$ のとき　$a>5>c$ であり, ③より $a-c<5<\dfrac{ac}{a-c}$

(a)　$a-c=2$ かつ $ac>10$ のとき　$(a,\ c)=(6,\ 4)$

(b)　$a-c=3$ かつ $ac>15$ のとき　$(a,\ c)=(6,\ 3),\ (7,\ 4)$

(c)　$a-c=4$ かつ $ac>20$ のとき　$(a,\ c)=(7,\ 3)$

(iv)　$b=6$ のとき　$a>6>c$ であり, ③より $a-c<6<\dfrac{ac}{a-c}$

(a)　$a-c=2$ かつ $ac>12$ のとき　$(a,\ c)=(7,\ 5)$

(b)　$a-c=3$ かつ $ac>18$ のとき　$(a,\ c)=(7,\ 4)$

(c)　$a-c=4$ かつ $ac>24$ のとき　この場合を満たす $(a,\ c)$ は存在しない。

(d)　$a-c=5$ かつ $ac>30$ のとき　この場合を満たす $(a,\ c)$ は存在しない。

(i)～(iv)より, (＊)を満たす$(a,\ b,\ c)$の組は 9 個である。

(3) まず$a>b=c$のとき，$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}$となり，$a+b>c$，$c+a>b$，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{c}$，$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}>\dfrac{1}{a}$，$\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$は, すべて満たされている。

すると, (＊)を満たす条件は, $b+c>a$であり, $a>b=c$から$2c>a$となる。

これより, $(a,\ c)$の条件は, $a>c$かつ$a<2c$より$c<a<2c$となり, (1)の結果から, (＊)を満たす$(a,\ b,\ c)$の組は 9 個である。

次に, $a=b=c$のとき, $\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}$となり, (＊)を満たす$(a,\ b,\ c)$の組は明らかに 7 個である。

以上より, a, b, cの大小関係も考えて, 条件(＊)を満たす$(a,\ b,\ c)$の組の個数は,

$$9\times3+9\times3!+9\times3+7=115$$

［解 説］

忍耐強く解いていくタイプの問題です。特に, (2)については, 解答例では b の値で場合分けをしましたが, a や c の値でもさほど変わりません。途中で浮気心が出てしまうとマズイことになります。