**1**

解答解説のページへ

四面体 OABC において, P を辺 OA の中点, Q を辺 OB を $2:1$ に内分する点, R を辺 BC の中点とする。P, Q, R を通る平面と辺 AC の交点を S とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ をそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　比 $|\overrightarrow{\mathrm{AS}}|:|\overrightarrow{\mathrm{SC}}|$ を求めよ。

(3)　四面体 OABC を 1 辺の長さが 1 の正四面体とするとき, $|\overrightarrow{\mathrm{QS}}|$ を求めよ。

$\boxed{2}$　　解答解説のページへ

$a$ を正の定数とし，$f(x)=\left|x^2+2ax+a\right|$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(2)　$y=f(x)$ のグラフが点 $(-1,\ 2)$ を通るときの $a$ の値を求めよ。また，そのときの $y=f(x)$ のグラフと $x$ 軸で囲まれる図形の面積を求めよ。

(3)　$a=2$ とする。すべての実数 $x$ に対して $f(x)\geqq 2x+b$ が成り立つような実数 $b$ のとり得る値の範囲を求めよ。

**3**

解答解説のページへ

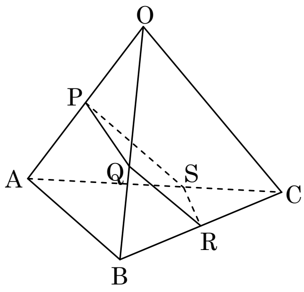
さいころを 4 回振って出た目を順に $a,\ b,\ c,\ d$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$ab \geqq cd + 25$ となる確率を求めよ。

(2)　$ab = cd$ となる確率を求めよ。

**1**

問題のページへ




(1)　P は OA の中点，Q は OB を $2:1$ に内分する点，R は BC の中点であり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

(2)　P，Q，R を通る平面と辺 AC の交点 S に対し，$|\overrightarrow{\mathrm{AS}}|:|\overrightarrow{\mathrm{SC}}|=k:1-k$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=(1-k)\vec{a}+k\vec{c}\cdots\cdots\cdots①$$

また，$s, t$ を実数として，(1)の結果より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+s\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+t\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\frac{1}{2}\vec{a}+s\Big(-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\Big)+t\Big(-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\Big)$$

$$=\Big(\frac{1}{2}-\frac{s}{2}-\frac{t}{2}\Big)\vec{a}+\Big(\frac{2}{3}s+\frac{t}{2}\Big)\vec{b}+\frac{t}{2}\vec{c}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立なので，

$$1-k=\frac{1}{2}-\frac{s}{2}-\frac{t}{2}\cdots\cdots\cdots③,\quad 0=\frac{2}{3}s+\frac{t}{2}\cdots\cdots\cdots④,\quad k=\frac{t}{2}\cdots\cdots\cdots⑤$$

③⑤より，$1-\frac{t}{2}=\frac{1}{2}-\frac{s}{2}-\frac{t}{2}$ となり，$s=-1$

④に代入すると，$-\frac{2}{3}+\frac{t}{2}=0$ から $t=\frac{4}{3}$ となり，⑤から $k=\frac{2}{3}$ なので，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AS}}|:|\overrightarrow{\mathrm{SC}}|=\frac{2}{3}:\frac{1}{3}=2:1$$

(3)　1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC に対し，

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1^2\cdot\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{QS}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{c}-\frac{2}{3}\vec{b}=\frac{1}{3}(\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c})$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{QS}}|=\frac{1}{3}|\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c}|$ となり，

$$|\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c}|^2=|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2+4|\vec{c}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}-8\vec{b}\cdot\vec{c}+4\vec{c}\cdot\vec{a}$$

$$=1+4+4-4\cdot\frac{1}{2}-8\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{2}=5$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{QS}}|=\frac{\sqrt{5}}{3}$ である。

［解　説］

空間ベクトルの四面体への応用について，参考書の例題の掲載されるような典型題です。

$\boxed{2}$ 問題のページへ

(1)　$a>0$ のとき，$f(x)=\left|x^2+2ax+a\right|=\left|(x+a)^2-a^2+a\right|$ に対して，

(i)　$-a^2+a<0\ (a>1)$ のとき

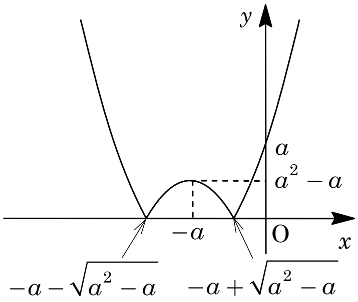
$-a-\sqrt{a^2-a}<x<-a+\sqrt{a^2-a}$ において，

$$f(x)=-x^2-2ax-a=-(x+a)^2+a^2-a$$

$x\leqq -a-\sqrt{a^2-a}$，$-a+\sqrt{a^2-a}\leqq x$ において，

$$f(x)=x^2+2ax+a=(x+a)^2-a^2+a$$

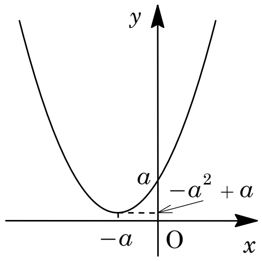
よって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。




(ii)　$-a^2+a\geqq 0\ (0<a\leqq 1)$ のとき

$$f(x)=x^2+2ax+a=(x+a)^2-a^2+a$$

よって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。




(2)　$y=f(x)$ のグラフが点 $(-1,\ 2)$ を通ることより，

$$2=\left|1-2a+a\right|,\ \left|1-a\right|=2,\ 1-a=\pm 2$$

$a>0$ から $1-a=-2$ となり，$a=3$

このとき，(1)の(i)の場合に対応し，$f(x)=\left|x^2+6x+3\right|$

そこで，$\alpha=-3-\sqrt{6}$，$\beta=-3+\sqrt{6}$ とおくと，$y=f(x)$ のグラフと $x$ 軸で囲まれる図形の面積 $S$ は，

$$S=\int_\alpha^\beta(-x^2-6x-3)\,dx=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{6}\left(2\sqrt{6}\right)^3=8\sqrt{6}$$

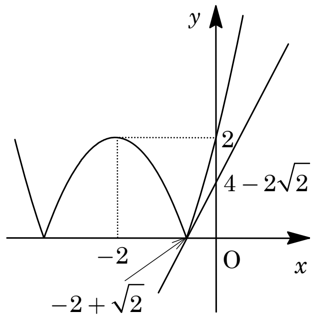
(3)　$a=2$ のとき，$f(x)=\left|x^2+4x+2\right|$ となる。

さて，$y=x^2+4x+2$ のグラフ上の $x=t$ における接線の傾きが 2 とすると，$y'=2x+4$ から，

$$2t+4=2,\ t=-1$$

すると，$-1<-2+\sqrt{2}$ から，$y=f(x)$ のグラフがつねに直線 $y=2x+b$ の上側にあり，しかも $b$ の値が最大になるのは，右図の位置関係の場合である。

すなわち，すべての $x$ に対して $f(x)\geqq 2x+b$ が成り立つ $b$ のとり得る値は，$b\leqq 4-2\sqrt{2}$ である。




［解　説］

絶対値つきの関数のグラフについての基本問題です。(3)では，図だけで処理をするには微妙な感じでしたので，まず数式を用いて確認をしています。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1)　まず，さいころの出た目とその積をまとめると，右表のようになる。

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
| 3 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 |
| 4 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 |
| 5 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
| 6 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 |

さて，4 回振って出た目を順に $a, b, c, d$ とし，$ab \geqq cd+25$ となる場合は，$ab \geqq 26$ から，

$$ab=30,\ 36$$

(i)　$ab=30$ のとき

$(a,\ b)$ の組は 2 通りあり，$cd \leqq 5$ から $(c,\ d)$ の組は 10 通りより，$(a,\ b,\ c,\ d)$ の組は $2\times10=20$ 通りとなる。

(ii)　$ab=36$ のとき

$(a,\ b)$ の組は 1 通りで，$cd \leqq 11$ から $(c,\ d)$ の組は 19 通りより，$(a,\ b,\ c,\ d)$ の組は $1\times19=19$ 通りとなる。

(i)(ii)より，$ab \geqq cd+25$ となる確率は，$\dfrac{20+19}{6^4}=\dfrac{13}{432}$ である。

(2)　$ab=cd=k$ とするとき，ある $k$ の値に対して，$(a,\ b)$ の組，$(c,\ d)$ の組が何通りずつ可能かということにより場合分けをする。

(i)　$(a,\ b)$，$(c,\ d)$ の組が 1 通りずつのとき

$k=1,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36$ であり，このとき $(a,\ b,\ c,\ d)$ の組は $5\times1^2=5$ 通りとなる。

(ii)　$(a,\ b)$，$(c,\ d)$ の組が 2 通りずつのとき

$k=2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 10,\ 15,\ 18,\ 20,\ 24,\ 30$ であり，このとき $(a,\ b,\ c,\ d)$ の組は $10\times2^2=40$ 通りとなる。

(iii)　$(a,\ b)$，$(c,\ d)$ の組が 3 通りずつのとき

$k=4$ であり，このとき $(a,\ b,\ c,\ d)$ の組は $1\times3^2=9$ 通りとなる。

(iv)　$(a,\ b)$，$(c,\ d)$ の組が 4 通りずつのとき

$k=6,\ 12$ であり，このとき $(a,\ b,\ c,\ d)$ の組は $2\times4^2=32$ 通りとなる。

(i)～(iv)より，$ab=cd$ となる確率は，$\dfrac{5+40+9+32}{6^4}=\dfrac{43}{648}$ である。

［解 説］

すべての場合を列挙し準備をしておいて，そのあと数え上げるタイプです。(2)では，出た目の積の値を 4 つの場合に分けて計算することがポイントです。