1

解答解説のページへ

四面体 OABC において, P を辺 OA の中点, Q を辺 OB を $2:1$ に内分する点, R を辺 BC の中点とする。P, Q, R を通る平面と辺 AC の交点を S とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ をそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　比 $\left|\overrightarrow{\mathrm{AS}}\right|:\left|\overrightarrow{\mathrm{SC}}\right|$ を求めよ。

(3)　四面体 OABC を 1 辺の長さが 1 の正四面体とするとき, $\left|\overrightarrow{\mathrm{QS}}\right|$ を求めよ。

2

解答解説のページへ

a を正の定数とし，$f(x)=\left|x^2+2ax+a\right|$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(2)　$a=2$ とする。すべての実数 x に対して $f(x)\geqq 2x+b$ が成り立つような実数 b のとり得る値の範囲を求めよ。

(3)　$0<a\leqq\dfrac{3}{2}$ とする。すべての実数 x に対して $f(x)\geqq 2x+b$ が成り立つような実数 b のとり得る値の範囲を a を用いて表せ。また，その条件を満たす点 $(a,\ b)$ の領域を ab 平面上に図示せよ。

3

解答解説のページへ

a を正の定数とし，2 曲線 $C_1 : y = \log x$ ，$C_2 : y = ax^2$ が点 P で接しているとする。以下の問いに答えよ。

(1)　P の座標と a の値を求めよ。

(2)　2 曲線 C_1，C_2 と x 軸で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

4

解答解説のページへ

約数，公約数，最大公約数を次のように定める。

・ 2 つの整数 a, b に対して，$a = bk$ を満たす整数 k が存在するとき，b は a の約数という。

・ 2 つの整数に共通の約数をそれらの公約数という。

・ 少なくとも一方が 0 でない 2 つの整数の公約数の中で最大のものをそれらの最大公約数という。

以下の問いに答えよ。

(1) a, b, c, p は 0 でない整数で $a = pb + c$ を満たしているとする。

(i) $a = 18$，$b = 30$，$c = -42$，$p = 2$ のとき，a と b の公約数の集合 S，および b と c の公約数の集合 T を求めよ。

(ii) a と b の最大公約数を M，b と c の最大公約数を N とする。M と N は等しいことを示せ。ただし，a, b, c, p は 0 でない任意の整数とする。

(2) 自然数の列 $\{a_n\}$ を，$a_{n+2} = 6a_{n+1} + a_n$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$，$a_1 = 3$，$a_2 = 4$ で定める。

(i) a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ。

(ii) a_{n+4} を a_{n+2} と a_n を用いて表せ。

(iii) a_{n+2} と a_n の最大公約数を求めよ。

5

解答解説のページへ

極方程式で表された xy 平面上の曲線 $r=1+\cos\theta\ (0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ を C とする。以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 C 上の点を直交座標 $(x,\ y)$ で表したとき，$\dfrac{dx}{d\theta}=0$ となる点，および $\dfrac{dy}{d\theta}=0$ となる点の直交座標を求めよ。

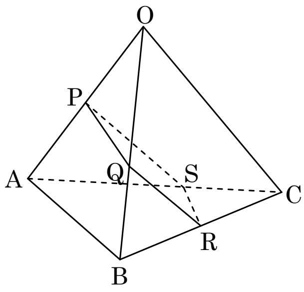
(2) $\displaystyle\lim_{\theta\to\pi}\frac{dy}{dx}$ を求めよ。

(3) 曲線 C の概形を xy 平面上にかけ。

(4) 曲線 C の長さを求めよ。

1

問題のページへ



(1)　P は OA の中点，Q は OB を $2:1$ に内分する点，R は BC の中点であり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

(2)　P，Q，R を通る平面と辺 AC の交点 S に対し，$|\overrightarrow{\mathrm{AS}}|:|\overrightarrow{\mathrm{SC}}|=k:1-k$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=(1-k)\vec{a}+k\vec{c}\cdots\cdots\cdots①$$

また，s, t を実数として，(1)の結果より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+s\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+t\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\frac{1}{2}\vec{a}+s\Big(-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\Big)+t\Big(-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\Big)$$

$$=\Big(\frac{1}{2}-\frac{s}{2}-\frac{t}{2}\Big)\vec{a}+\Big(\frac{2}{3}s+\frac{t}{2}\Big)\vec{b}+\frac{t}{2}\vec{c}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立なので，

$$1-k=\frac{1}{2}-\frac{s}{2}-\frac{t}{2}\cdots\cdots\cdots③,\quad 0=\frac{2}{3}s+\frac{t}{2}\cdots\cdots\cdots④,\quad k=\frac{t}{2}\cdots\cdots\cdots⑤$$

③⑤より，$1-\dfrac{t}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{s}{2}-\dfrac{t}{2}$ となり，$s=-1$

④に代入すると，$-\dfrac{2}{3}+\dfrac{t}{2}=0$ から $t=\dfrac{4}{3}$ となり，⑤から $k=\dfrac{2}{3}$ なので，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AS}}|:|\overrightarrow{\mathrm{SC}}|=\frac{2}{3}:\frac{1}{3}=2:1$$

(3)　1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC に対し，

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1^2\cdot\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{QS}}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{c}-\dfrac{2}{3}\vec{b}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c})$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{QS}}|=\dfrac{1}{3}|\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c}|$ となり，

$$|\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c}|^2=|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2+4|\vec{c}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}-8\vec{b}\cdot\vec{c}+4\vec{c}\cdot\vec{a}$$

$$=1+4+4-4\cdot\frac{1}{2}-8\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{2}=5$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{QS}}|=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ である。

［解　説］

空間ベクトルの四面体への応用について，参考書の例題の掲載されるような典型題です。

$\boxed{2}$ 問題のページへ

(1)　$a>0$ のとき，$f(x)=\left|x^2+2ax+a\right|=\left|(x+a)^2-a^2+a\right|$ に対して，

(i)　$-a^2+a<0\ (a>1)$ のとき

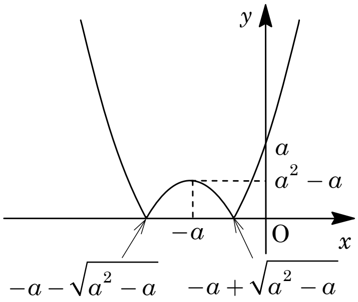
$-a-\sqrt{a^2-a}<x<-a+\sqrt{a^2-a}$ において，

$$f(x)=-x^2-2ax-a=-(x+a)^2+a^2-a$$

$x\leqq -a-\sqrt{a^2-a}$，$-a+\sqrt{a^2-a}\leqq x$ において，

$$f(x)=x^2+2ax+a=(x+a)^2-a^2+a$$

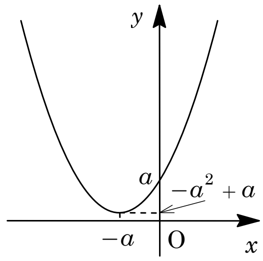
よって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。



(ii)　$-a^2+a\geqq 0\ (0<a\leqq 1)$ のとき

$$f(x)=x^2+2ax+a=(x+a)^2-a^2+a$$

よって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。

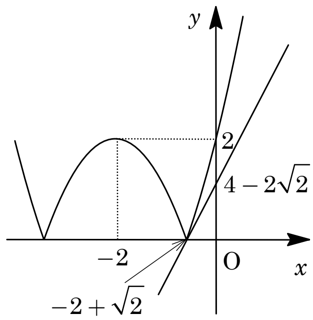


(2)　$a=2$ のとき，$f(x)=\left|x^2+4x+2\right|$ となる。

さて，$y=x^2+4x+2$ のグラフ上の $x=t$ における接線の傾きが 2 とすると，$y'=2x+4$ から，

$$2t+4=2,\ t=-1$$

すると，$-1<-2+\sqrt{2}$ から，$y=f(x)$ のグラフがつねに直線 $y=2x+b$ の上側にあり，しかも b の値が最大になるのは，右図の位置関係の場合である。



すなわち，すべての x に対して $f(x)\geqq 2x+b$ が成り立つ b のとり得る値は，$b\leqq 4-2\sqrt{2}$ である。

(3)　(a)　$0<a\leqq 1$ のとき

(1)(ii)の場合から $f(x)=x^2+2ax+a$ となり，$y=f(x)$ のグラフ上の $x=t$ において接線の傾きが 2 とすると，$f'(x)=2x+2a$ から，

$$2t+2a=2,\ t=1-a$$

ここで，直線 $y=2x+b$ が点 $(1-a,\ f(1-a))=(1-a,\ -a^2+a+1)$ を通るとき，

$$-a^2+a+1=2(1-a)+b,\ b=-a^2+3a-1$$

よって，すべての x に対して $f(x)\geqq 2x+b$ が成り立つ b の条件は，

$$b\leqq -a^2+3a-1$$

(b)　$1<a\leqq\dfrac{3}{2}$ のとき

(a)より，$y=x^2+2ax+a$ のグラフと直線 $y=2x+b$ の接点は $x=1-a$ となり，まず，この値と $x=-a+\sqrt{a^2-a}$ との大小関係を調べると，

$$-a+\sqrt{a^2-a}-(1-a)=\sqrt{a^2-a}-1=\sqrt{\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}-1\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}-1<0$$

これより，$-a+\sqrt{a^2-a}<1-a$ となり，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=2x+b$ がただ 1 つの共有点をもつとき，この点は $y=x^2+2ax+a$ 上の接点である。

すると，(a)と同様に，すべての x に対して $f(x)\geqq 2x+b$ が成り立つ b の条件は，

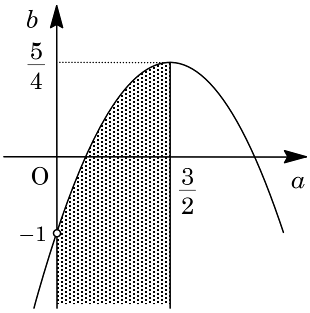
$$b\leqq -a^2+3a-1$$

(a)(b)より，求める条件は，$0<a\leqq\dfrac{3}{2}$ において，

$$b\leqq -a^2+3a-1=-\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$$

この条件を ab 平面上に図示すると，右図の網点部となる。

ただし，b 軸以外の境界線は領域に含む。



［解 説］

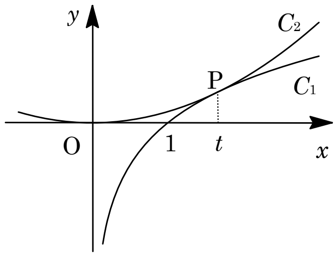
絶対値つきの関数のグラフについての基本問題です。(2)(3)では，図だけで処理をするには微妙な感じでしたので，まず数式を用いて確認をしています。

3

問題のページへ

(1)　$C_1 : y=\log x$ ……①と $C_2 : y=ax^2$ ……②が接するとき，接点 P の x 座標を $x=t$ とおくと，

$$\log t = at^2 \cdots\cdots\cdots③$$



また，①から $y'=\dfrac{1}{x}$，②から $y'=2ax$ となり，

$$\frac{1}{t}=2at \cdots\cdots\cdots④$$

④より $at^2=\dfrac{1}{2}$ となり，③に代入すると $\log t=\dfrac{1}{2}$，$t=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$ である。

これより，$\mathrm{P}\left(\sqrt{e},\ \dfrac{1}{2}\right)$ となり，④から $a=\dfrac{1}{2e}$ である。

(2)　2 曲線 C_1，C_2 と x 軸で囲まれた部分を，x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を V とすると，(1)の結果から，

$$V=\pi\int_0^{\sqrt{e}}\left(\frac{1}{2e}x^2\right)^2dx-\pi\int_1^{\sqrt{e}}(\log x)^2dx$$

$$=\frac{\pi}{4e^2}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^{\sqrt{e}}-\pi\left(\left[x(\log x)^2\right]_1^{\sqrt{e}}-\int_1^{\sqrt{e}}x\cdot 2\log x\cdot\frac{1}{x}dx\right)$$

$$=\frac{\sqrt{e}}{20}\pi-\frac{\sqrt{e}}{4}\pi+2\pi\left[x\log x-x\right]_1^{\sqrt{e}}=-\frac{\sqrt{e}}{5}\pi+2\pi\left(\frac{\sqrt{e}}{2}-\sqrt{e}+1\right)$$

$$=\left(-\frac{6}{5}\sqrt{e}+2\right)\pi$$

［解　説］

有名な構図の頻出問題です。体積計算も複雑ではありません。

4

問題のページへ

(1) (i)　$a=18=2\times3^2$ と $b=30=2\times3\times5$ の公約数の集合 S は,

$$S=\{\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm6\}$$

また, $b=30=2\times3\times5$ と $c=-42=-2\times3\times7$ の公約数の集合 T は,

$$T=\{\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm6\}$$

(ii)　a, b, c, p は 0 でない任意の整数, そして a と b の最大公約数を M, b と c の最大公約数を N とし, $a=pb+c$ ……①を満たしている。

まず, N は b と c の公約数で, ①から N は a の約数でもある。すると, N は a と b の公約数となり, a と b の最大公約数 M と比べると, $N\leqq M$ である。

また, M は a と b の公約数で, ①から $c=a-pb$ となるので, M は c の約数でもある。すると, M は b と c の公約数となり, b と c の最大公約数 N と比べると, $M\leqq N$ である。

したがって, $N\leqq M$ かつ $M\leqq N$ から, $M=N$ である。

(2) (i)　0 でない任意の整数 l と m に対して, その最大公約数を $G(l,\ m)$ で表す。

さて, $a_1=3$, $a_2=4$, $a_{n+2}=6a_{n+1}+a_n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ で定められる自然数の列 $\{a_n\}$ に対して, 帰納的に $a_n\neq0$ なので, (1)から $G(a_{n+2},\ a_{n+1})=G(a_{n+1},\ a_n)$

$$G(a_{n+1},\ a_n)=G(a_n,\ a_{n-1})=\cdots=G(a_3,\ a_2)=G(a_2,\ a_1)=G(4,\ 3)=1$$

(ii)　$a_{n+4}=6a_{n+3}+a_{n+2}=6(6a_{n+2}+a_{n+1})+a_{n+2}=37a_{n+2}+6a_{n+1}$

ここで, $6a_{n+1}=a_{n+2}-a_n$ から,

$$a_{n+4}=37a_{n+2}+(a_{n+2}-a_n)=38a_{n+2}-a_n \cdots\cdots\cdots ②$$

(iii)　②に(1)の結果を適用すると, $G(a_{n+4},\ a_{n+2})=G(a_{n+2},\ a_n)$ である。

ここで, $a_3=6a_2+a_1=27$, $a_4=6a_3+a_2=166$ なので,

(a)　n が奇数のとき

$$G(a_{n+2},\ a_n)=G(a_n,\ a_{n-2})=\cdots=G(a_3,\ a_1)=G(27,\ 3)=3$$

(b)　n が偶数のとき

$$G(a_{n+2},\ a_n)=G(a_n,\ a_{n-2})=\cdots=G(a_4,\ a_2)=G(166,\ 4)=2$$

［解 説］

ユークリッドの互除法に関する基本を確認した後, それを漸化式に適用する問題です。細かい誘導のため, 方針に迷いはないでしょう。

$\boxed{5}$ 問題のページへ

(1)　$C: r=1+\cos\theta\ (0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ を直交座標で表すと，

$$x=(1+\cos\theta)\cos\theta=\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{2}\cos 2\theta+\cos\theta+\frac{1}{2}\ \cdots\cdots\cdots①$$

$$y=(1+\cos\theta)\sin\theta=\sin\theta+\cos\theta\sin\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta+\sin\theta\ \cdots\cdots\cdots②$$

①より，$\dfrac{dx}{d\theta}=-\sin 2\theta-\sin\theta=-\sin\theta(2\cos\theta+1)$

$\dfrac{dx}{d\theta}=0$ とすると，$\theta=0,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \pi,\ \dfrac{4}{3}\pi,\ 2\pi$ となり，対応する点は順に，

$$(2,\ 0),\ \left(-\frac{1}{4},\ \frac{\sqrt{3}}{4}\right),\ (0,\ 0),\ \left(-\frac{1}{4},\ -\frac{\sqrt{3}}{4}\right),\ (2,\ 0)$$

②より，$\dfrac{dy}{d\theta}=\cos 2\theta+\cos\theta=2\cos^2\theta+\cos\theta-1=(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)$

$\dfrac{dy}{d\theta}=0$ とすると，$\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$ となり，対応する点は順に，

$$\left(\frac{3}{4},\ \frac{3}{4}\sqrt{3}\right),\ (0,\ 0),\ \left(\frac{3}{4},\ -\frac{3}{4}\sqrt{3}\right)$$

(2)　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)}{-\sin\theta(2\cos\theta+1)}$ より，

$$\lim_{\theta\to\pi}\frac{dy}{dx}=-\lim_{\theta\to\pi}\frac{2\cos\theta-1}{2\cos\theta+1}\cdot\frac{(\cos\theta+1)(1-\cos\theta)}{\sin\theta(1-\cos\theta)}=-\lim_{\theta\to\pi}\frac{2\cos\theta-1}{2\cos\theta+1}\cdot\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

$$=-\frac{-2-1}{-2+1}\cdot\frac{0}{1+1}=0$$

(3)　$x=f(\theta)$，$y=g(\theta)$ とおき，

$$f(2\pi-\theta)=f(\theta)$$

$$g(2\pi-\theta)=-g(\theta)$$

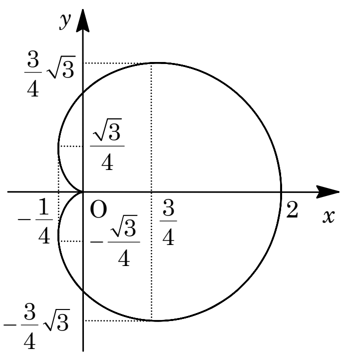
これより，曲線 C の $0\leqq\theta\leqq\pi$ の部分と $\pi\leqq\theta\leqq 2\pi$ の部分は，x 軸対称となり，まず $0\leqq\theta\leqq\pi$ において $x,\ y$ の増減を調べると，右表のようになる。

θ	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$\dfrac{dx}{d\theta}$	0	$-$		$-$	0	$+$	0
x	2	$\searrow$	$\dfrac{3}{4}$	$\searrow$	$-\dfrac{1}{4}$	$\nearrow$	0
$\dfrac{dy}{d\theta}$		$+$	0	$-$		$-$	0
y	0	$\nearrow$	$\dfrac{3}{4}\sqrt{3}$	$\searrow$	$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

また，(2)から $\displaystyle\lim_{\theta\to\pi-0}\frac{dy}{dx}=0$ であり，さらに，

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{dy}{dx}=-\infty$$

そして，この $0\leqq\theta\leqq\pi$ の部分を x 軸に折り返してできる $\pi\leqq\theta\leqq 2\pi$ の部分を合わせると，曲線 C の概形は右図のようになる。



(4)　曲線 C の長さを l とし，(1)から，

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2=\sin^2 2\theta+2\sin 2\theta\sin\theta+\sin^2\theta$$
$$\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=\cos^2 2\theta+2\cos 2\theta\cos\theta+\cos^2\theta$$

x 軸に関する対称性を利用すると，

$$l=2\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^2 2\theta+2\sin 2\theta\sin\theta+\sin^2\theta+\cos^2 2\theta+2\cos 2\theta\cos\theta+\cos^2\theta}\,d\theta$$
$$=2\int_0^{\pi}\sqrt{1+1+2\cos(2\theta-\theta)}\,d\theta=2\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\theta}\,d\theta$$
$$=2\int_0^{\pi}\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta=4\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta=8\Big[\sin\frac{\theta}{2}\Big]_0^{\pi}=8$$

［解　説］

カージオイドの概形をかき，その長さを求める問題です。まったく同じ問題を，一度は演習したにちがいないと思われますが……。