1　　解答解説のページへ

t を正の実数とする。$f(x)=x^3+3x^2-3(t^2-1)x+2t^3-3t^2+1$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$2t^3-3t^2+1$ を因数分解せよ。

(2)　$f(x)$ が極小値 0 をもつことを示せ。

(3)　$-1\leqq x\leqq 2$ における $f(x)$ の最小値 m と最大値 M を t の式で表せ。

２

解答解説のページへ

次の 2 つの条件を満たす x の 2 次式 $f(x)$ を考える。

(i)　$y=f(x)$ のグラフは点 $(1,\ 4)$ を通る

(ii)　$\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,dx=15$

以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の 1 次の項の係数を求めよ。

(2)　2 次方程式 $f(x)=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，α と β の満たす関係式を求めよ。

(3)　(2)における α，β がともに正の整数となるような $f(x)$ をすべて求めよ。

$\boxed{3}$　　解答解説のページへ

$\overrightarrow{v_1}=(1,\ 1,\ 1)$，$\overrightarrow{v_2}=(1,\ -1,\ -1)$，$\overrightarrow{v_3}=(-1,\ 1,\ -1)$，$\overrightarrow{v_4}=(-1,\ -1,\ 1)$とする。座標空間内の動点 P が原点 O から出発し，正四面体のサイコロ（1，2，3，4 の目がそれぞれ確率$\dfrac{1}{4}$で出る）をふるごとに，出た目が $k\,(k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$のときは$\overrightarrow{v_k}$だけ移動する。すなわち，サイコロを n 回ふった後の動点 P の位置をP_nとして，サイコロを$(n+1)$回目にふって出た目が k ならば，$\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=\overrightarrow{v_k}$である。ただし，$\mathrm{P}_0=\mathrm{O}$である。以下の問いに答えよ。

(1)　点P_2がx軸上にある確率を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2}\perp\overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_4}$となる確率を求めよ。

(3)　4 点P_0，P_1，P_2，P_3が同一平面上にある確率を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$2t^3-3t^2+1=(t-1)(2t^2-t-1)=(t-1)^2(2t+1)$

(2)　$f(x)=x^3+3x^2-3(t^2-1)x+2t^3-3t^2+1$ に対して，

$$f'(x)=3x^2+6x-3(t^2-1)$$
$$=3\{x^2+2x-(t+1)(t-1)\}$$
$$=3(x+t+1)(x-t+1)$$

x	$\cdots$	$-t-1$	$\cdots$	$t-1$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

$t>0$ より，$f(x)$ の増減は右表のようになり，極小値は，(1)の結果を利用して，

$$f(t-1)=(t-1)^3+3(t-1)^2-3(t+1)(t-1)^2+(t-1)^2(2t+1)$$
$$=(t-1)^2(t-1+3-3t-3+2t+1)=0$$

(3)　まず，極大値および $-1\leqq x\leqq 2$ における境界値を求めておくと，

$$f(-t-1)=-(t+1)^3+3(t+1)^2+3(t-1)(t+1)^2+2t^3-3t^2+1$$
$$=(t+1)^2(-t-1+3+3t-3)+2t^3-3t^2+1$$
$$=(t+1)^2(2t-1)+2t^3-3t^2+1=4t^3$$
$$f(-1)=-1+3+3t^2-3+2t^3-3t^2+1=2t^3$$
$$f(2)=8+12-6t^2+6+2t^3-3t^2+1=2t^3-9t^2+27$$

ここで，$f(x)=0$ とおくと，$(x-t+1)^2(x+2t+1)=0$ となり，

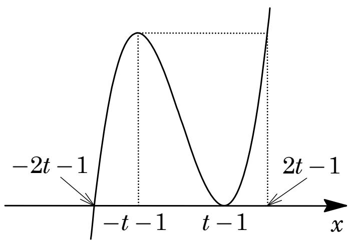
$$x=t-1,\ -2t-1$$

また，$f(x)=4t^3$ とおくと，

$$x^3+3x^2-3(t^2-1)x-2t^3-3t^2+1=0$$

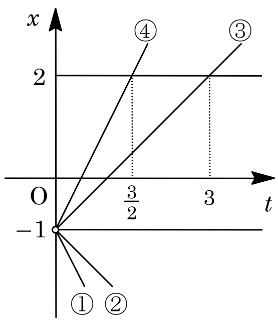
すると，$(x+t+1)^2(x-2t+1)=0$ となり，

$$x=-t-1,\ 2t-1$$



よって，$y=f(x)$ のグラフの概形は右図のようになる。

さて，$t>0$ において，$x=-1,\ 2$ と $x=-2t-1$ ……①，$x=-t-1$ ……②，$x=t-1$ ……③，$x=2t-1$ ……④との関係をまとめると，右図のようになる。



これより，$-1\leqq x\leqq 2$ における $f(x)$ の最小値 m と最大値 M を求めるために，t の範囲を $0<t\leqq\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{3}{2}<t\leqq 3$，$t>3$ と場合分けをする。

(i)　$0<t\leqq\dfrac{3}{2}$ のとき

このとき，$-2t-1<-t-1<-1<t-1<2t-1\leqq 2$ となる。

すると，$f(2)>f(2t-1)=f(-t-1)>f(-1)$ から，

$$m=f(t-1)=0,\ M=f(2)=2t^3-9t^2+27$$

(ii)　$\dfrac{3}{2} < t \leqq 3$ のとき

このとき，$-2t-1 < -t-1 < -1 < t-1 \leqq 2 < 2t-1$ となる。

ここで，$f(2)-f(-1) = -9t^2+27 = -9(t-\sqrt{3})(t+\sqrt{3})$ となり，

(ii-i)　$\dfrac{3}{2} < t \leqq \sqrt{3}$ のとき

$f(2) \geqq f(-1)$ より，$m = f(t-1) = 0$，$M = f(2) = 2t^3-9t^2+27$

(ii-ii)　$\sqrt{3} < t \leqq 3$ のとき

$f(2) < f(-1)$ より，$m = f(t-1) = 0$，$M = f(-1) = 2t^3$

(iii)　$t > 3$ のとき

このとき，$-2t-1 < -t-1 < -1 < 2 < t-1 < 2t-1$ となるので，

$$m = f(2) = 2t^3-9t^2+27\,,\quad M = f(-1) = 2t^3$$

(i)～(iii)をまとめて，

$$m = 0\ (0 < t \leqq 3)\,,\quad m = 2t^3-9t^2+27\ (t > 3)$$

$$M = 2t^3-9t^2+27\ (0 < t \leqq \sqrt{3})\,,\quad M = 2t^3\ (t > \sqrt{3})$$

［解　説］

3 次関数の微分と増減が題材の頻出問題ですが，内容はかなり繁雑です。そのため，場合分けの前に，入念に準備を行いました。ただ，$t > 0$ なので，やりすぎたきらいもありますが。

$\boxed{2}$ 問題のページへ

(1)　$f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ とおくと，条件(i)から，$f(1)=4$ なので，

$$a+b+c=4\cdots\cdots\cdots①$$

また，条件(ii)から，$\displaystyle\int_{-1}^{2}(ax^2+bx+c)dx=15$ なので，

$$\frac{a}{3}(8+1)+\frac{b}{2}(4-1)+c(2+1)=15,\ a+\frac{b}{2}+c=5\cdots\cdots\cdots②$$

①②より $\dfrac{b}{2}=-1$ となり，$b=-2\cdots\cdots$③から $f(x)$ の 1 次の項の係数は -2 である。

(2)　①③より $a+c=6$ となり，$f(x)=ax^2-2x+6-a$

ここで，$f(x)=0$ の 2 つの解が α，β より，

$$\alpha+\beta=\frac{2}{a}\cdots\cdots\cdots④,\ \alpha\beta=\frac{6-a}{a}\cdots\cdots\cdots⑤$$

④⑤より，$\alpha\beta=3(\alpha+\beta)-1$，$\alpha\beta-3\alpha-3\beta=-1\cdots\cdots\cdots$⑥

(3)　⑥を変形して，$(\alpha-3)(\beta-3)=8\cdots\cdots\cdots$⑦

ここで，α，β はともに正の整数なので，$\alpha-3\geqq-2$，$\beta-3\geqq-2$ となり，

$$(\alpha-3,\ \beta-3)=(1,\ 8),\ (2,\ 4),\ (4,\ 2),\ (8,\ 1)$$

よって，$(\alpha,\ \beta)=(4,\ 11),\ (5,\ 7),\ (7,\ 5),\ (11,\ 4)$

(i)　$(\alpha,\ \beta)=(4,\ 11),\ (11,\ 4)$ のとき

④より，$a=\dfrac{2}{\alpha+\beta}=\dfrac{2}{15}$ となり，$f(x)=\dfrac{2}{15}x^2-2x+\dfrac{88}{15}$

(ii)　$(\alpha,\ \beta)=(5,\ 7),\ (7,\ 5)$ のとき

④より，$a=\dfrac{2}{\alpha+\beta}=\dfrac{1}{6}$ となり，$f(x)=\dfrac{1}{6}x^2-2x+\dfrac{35}{6}$

［解 説］

解と係数の関係を媒介にして作られた不定方程式を解く問題です。誘導が細かいため，基本を積み重ねると結論が導けます。

3　　　　問題のページへ

(1)　正四面体のサイコロを 2 回ふったとき，1 回目，2 回目に出た目を，それぞれ a, b とする。$\overrightarrow{v_1}=(1,\ 1,\ 1)$，$\overrightarrow{v_2}=(1,\ -1,\ -1)$，$\overrightarrow{v_3}=(-1,\ 1,\ -1)$，$\overrightarrow{v_4}=(-1,\ -1,\ 1)$ に対して，$P_0=O$ から $\overrightarrow{OP_2}=\overrightarrow{v_a}+\overrightarrow{v_b}$ である。

このとき，点 P_2 が x 軸上にあるのは，$(a,\ b)=(1,\ 2)$，$(2,\ 1)$，$(3,\ 4)$，$(4,\ 3)$ のときであり，その確率は $\left(\frac{1}{4}\right)^2\times 4=\frac{1}{4}$ となる。

(2)　(1)と同様に，点 P_2 が y 軸上にあるのは，$(a,\ b)=(1,\ 3)$，$(3,\ 1)$，$(2,\ 4)$，$(4,\ 2)$ のときであり，その確率は $\frac{1}{4}$ である。

また，点 P_2 が z 軸上にあるのは，$(a,\ b)=(1,\ 4)$，$(4,\ 1)$，$(2,\ 3)$，$(3,\ 2)$ のときであり，その確率は $\frac{1}{4}$ である。

さらに，$(a,\ b)=(1,\ 1)$ では $P_2(2,\ 2,\ 2)$，$(a,\ b)=(2,\ 2)$ では $P_2(2,\ -2,\ -2)$，$(a,\ b)=(3,\ 3)$ では $P_2(-2,\ 2,\ -2)$，$(a,\ b)=(4,\ 4)$ では $P_2(-2,\ -2,\ 2)$ となる。

さて，サイコロを 4 回ふったとき，1 回目，2 回目，3 回目，4 回目に出た目を，それぞれ a, b, c, d とすると，$\overrightarrow{P_0P_2}=\overrightarrow{v_a}+\overrightarrow{v_b}$，$\overrightarrow{P_2P_4}=\overrightarrow{v_c}+\overrightarrow{v_d}$ となる。

すると，$\overrightarrow{P_2P_4}=\overrightarrow{v_c}+\overrightarrow{v_d}$ についても $\overrightarrow{P_0P_2}=\overrightarrow{v_a}+\overrightarrow{v_b}$ と同様に考えることができるので，$\overrightarrow{P_0P_2}\perp\overrightarrow{P_2P_4}$ となるのは，次の場合である。

(a)　$\overrightarrow{P_0P_2}$ が x 軸に平行で，$\overrightarrow{P_2P_4}$ が y 軸に平行または z 軸に平行なとき

(b)　$\overrightarrow{P_0P_2}$ が y 軸に平行で，$\overrightarrow{P_2P_4}$ が x 軸に平行または z 軸に平行なとき

(c)　$\overrightarrow{P_0P_2}$ が z 軸に平行で，$\overrightarrow{P_2P_4}$ が x 軸に平行または y 軸に平行なとき

その確率は，$\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{8}$ である。

(3)　(2)と同様に設定すると，$\overrightarrow{P_0P_1}=\overrightarrow{v_a}$，$\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{v_b}$，$\overrightarrow{P_2P_3}=\overrightarrow{v_c}$ となる。

これより，4 点 P_0，P_1，P_2，P_3 が同一平面上にある条件は，$\overrightarrow{v_a}$，$\overrightarrow{v_b}$，$\overrightarrow{v_c}$ が同一平面上のベクトルであることになる。

ここで，$\overrightarrow{v_a}$，$\overrightarrow{v_b}$，$\overrightarrow{v_c}$ が同一平面上にないときを考えると，$\overrightarrow{v_1}$，$\overrightarrow{v_2}$，$\overrightarrow{v_3}$，$\overrightarrow{v_4}$ から異なる 3 個のベクトルを選ぶとして，その確率は $\frac{{}_4C_3\cdot 3!}{4^3}=\frac{3}{8}$ である。

よって，4 点 P_0，P_1，P_2，P_3 が同一平面上にある確率は，$1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$ となる。

［解　説］

確率に空間ベクトルが融合した記述しにくい問題です。(3)では，余事象を利用して 1 次独立な 3 つのベクトルを選ぶ確率をもとに計算しましたが，場合分けをして直接的に求めても構いません。