1

解答解説のページへ

n を自然数とする。$f(x)=\sin x-nx^2+\dfrac{1}{9}x^3$ とおく。$3<\pi<4$ であることを用いて，以下の問いに答えよ。

(1)　$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$f''(x)<0$ であることを示せ。

(2)　方程式 $f(x)=0$ は $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲に解をただ 1 つもつことを示せ。

(3)　(2)における解を x_n とする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=0$ であることを示し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}nx_n$ を求めよ。

2

解答解説のページへ

n を自然数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　実数 x に対して，次の等式が成り立つことを示せ。

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-kx}-\frac{1}{1+e^{-x}}=\frac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}$$

(2)　次の等式を満たす S の値を求めよ。

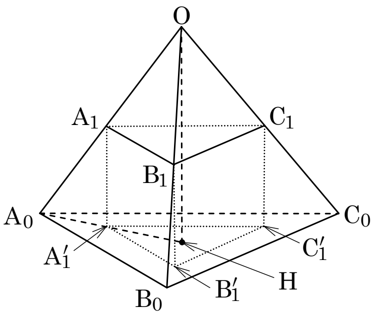
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k}-S=(-1)^n\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx$$

(3)　不等式 $\displaystyle\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx \leqq \frac{1}{n+1}$ が成り立つことを示し，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k}$ を求めよ。

3

解答解説のページへ

1 辺の長さが a_0 の正四面体 $\mathrm{OA_0B_0C_0}$ がある。図のように，辺 $\mathrm{OA_0}$ 上の点 $\mathrm{A_1}$，辺 $\mathrm{OB_0}$ 上の点 $\mathrm{B_1}$，辺 $\mathrm{OC_0}$ 上の点 $\mathrm{C_1}$ から平面 $\mathrm{A_0B_0C_0}$ に下ろした垂線をそれぞれ $\mathrm{A_1A_1'}$，$\mathrm{B_1B_1'}$，$\mathrm{C_1C_1'}$ としたとき，三角柱 $\mathrm{A_1B_1C_1}$-$\mathrm{A_1'B_1'C_1'}$ は正三角柱になるとする。ただし，ここでは底面が正三角形であり，側面が正方形である三角柱を正三角柱とよぶことにする。同様に，点 $\mathrm{A_2}$，$\mathrm{B_2}$，$\mathrm{C_2}$，$\mathrm{A_2'}$，$\mathrm{B_2'}$，$\mathrm{C_2'}$，…を次のように定める。正四面体 $\mathrm{OA}_k\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k$ において，辺 OA_k 上の点 A_{k+1}，辺 OB_k 上の点 B_{k+1}，辺 OC_k 上の点 C_{k+1} から平面 $\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k$ に下ろした垂線をそれぞれ $\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{A}_{k+1}'$，$\mathrm{B}_{k+1}\mathrm{B}_{k+1}'$，$\mathrm{C}_{k+1}\mathrm{C}_{k+1}'$ としたとき，三角柱 $\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{B}_{k+1}\mathrm{C}_{k+1}$-$\mathrm{A}_{k+1}'\mathrm{B}_{k+1}'\mathrm{C}_{k+1}'$ は正三角柱になるとする。辺 $\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k$ の長さを a_k とし，正三角柱 $\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k$-$\mathrm{A}_k'\mathrm{B}_k'\mathrm{C}_k'$ の体積を V_k とするとき，以下の問いに答えよ。



(1) 点 O から平面 $\mathrm{A_0B_0C_0}$ に下ろした垂線を OH とし，$\theta=\angle\mathrm{OA_0H}$ とするとき，$\cos\theta$ と $\sin\theta$ の値を求めよ。

(2) a_1 を a_0 を用いて表せ。

(3) V_k を a_0 を用いて表し，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}V_k$ を求めよ。

4

解答解説のページへ

$\overrightarrow{v_1}=(1,\ 1,\ 1)$，$\overrightarrow{v_2}=(1,\ -1,\ -1)$，$\overrightarrow{v_3}=(-1,\ 1,\ -1)$，$\overrightarrow{v_4}=(-1,\ -1,\ 1)$とする。座標空間内の動点Pが原点Oから出発し，正四面体のサイコロ（1, 2, 3, 4の目がそれぞれ確率$\dfrac{1}{4}$で出る）をふるごとに，出た目が $k\,(k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$のときは$\overrightarrow{v_k}$だけ移動する。すなわち，サイコロを n 回ふった後の動点 P の位置をP_nとして，サイコロを$(n+1)$回目にふって出た目が k ならば，$\overrightarrow{P_nP_{n+1}}=\overrightarrow{v_k}$である。ただし，$P_0=O$である。以下の問いに答えよ。

(1)　点P_2がx軸上にある確率を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{P_0P_2}\perp\overrightarrow{P_2P_4}$となる確率を求めよ。

(3)　4点P_0，P_1，P_2，P_3が同一平面上にある確率を求めよ。

(4)　nを6以下の自然数とする。$P_n=O$となる確率を求めよ。

5

解答解説のページへ

r, c, ω は正の定数とする。座標平面上の動点 P は時刻 $t=0$ のとき原点にあり，毎秒 c の速さで x 軸上を正の方向へ動いているとする。また，動点 Q は時刻 $t=0$ のとき点 $(0,\ -r)$ にあるとする。点 P から見て，動点 Q が点 P を中心とする半径 r の円周上を毎秒 ω ラジアンの割合で反時計回りに回転しているとき，以下の問いに答えよ。

(1) 時刻 t における動点 Q の座標 $(x(t),\ y(t))$ を求めよ。

(2) 動点 Q の描く曲線が交差しない，すなわち，$t_1 \neq t_2$ ならば $(x(t_1),\ y(t_1)) \neq (x(t_2),\ y(t_2))$ であるための必要十分条件を r, c, ω を用いて与えよ。

1

問題のページへ

(1)　n を自然数とし，$f(x)=\sin x-nx^2+\dfrac{1}{9}x^3$ に対して，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，

$$f'(x)=\cos x-2nx+\frac{1}{3}x^2,\ f''(x)=-\sin x-2n+\frac{2}{3}x,\ f'''(x)=-\cos x+\frac{2}{3}$$

すると，$\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$ となる $\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ がただ 1 つ存在し，このとき $f''(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f'''(x)$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		↘		↗	

ここで，$f''(0)=-2n<0$ であり，

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1-2n+\frac{\pi}{3}\leqq-1-2+\frac{\pi}{3}=\frac{1}{3}(-9+\pi)<0$$

よって，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$f''(x)<0$ である。

(2)　(1)より，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ において $f'(x)$ は単調減少となり，

$$f'(0)=1>0,\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-n\pi+\frac{\pi^2}{12}\leqq-\pi+\frac{\pi^2}{12}=\frac{\pi}{12}(-12+\pi)<0$$

すると，$f'(\beta)=0$ となる $\beta\left(0<\beta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ がただ 1 つ存在し，このとき $f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	β	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

ここで，$f(0)=0$ から $f(\beta)>0$ であり，

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\frac{n\pi^2}{4}+\frac{\pi^3}{72}\leqq1-\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi^3}{72}=-\frac{1}{72}\{\pi^2(18-\pi)-72\}<0$$

すると，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲に $f(x)=0$ となる x がただ 1 つ存在する。

(3)　$f(x_n)=0\left(0<x_n<\dfrac{\pi}{2}\right)$ より，$\sin x_n-nx_n{}^2+\dfrac{1}{9}x_n{}^3=0$ となり，

$$nx_n{}^2=\sin x_n+\frac{1}{9}x_n{}^3,\ x_n{}^2=\frac{\sin x_n}{n}+\frac{1}{9}\cdot\frac{x_n{}^3}{n}$$

ここで，$0<\sin x_n<1$，$0<x_n{}^3<\dfrac{\pi^3}{8}$ より，$n\to\infty$ のとき $\dfrac{\sin x_n}{n}\to0$，$\dfrac{x_n{}^3}{n}\to0$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n{}^2=0$ から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=0$ である。

また，$nx_n=\dfrac{\sin x_n}{x_n}+\dfrac{1}{9}x_n{}^2$ となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=0$ から，

$$\lim_{n\to\infty}nx_n=1+\frac{1}{9}\cdot0=1$$

［解 説］

微分と増減に極限が融合した典型題です。なお，スペースの関係上，$3<\pi<4$ を利用した部分については省いています。

２

問題のページへ

(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-kx}=\sum_{k=0}^{n}(-e^{-x})^k=\frac{1-(-e^{-x})^{n+1}}{1+e^{-x}}=\frac{1-(-1)^{n+1}e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}$ より，

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-kx}-\frac{1}{1+e^{-x}}=\frac{-(-1)^{n+1}e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}=\frac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}\cdots\cdots\cdots①$$

(2) ①の両辺を 0 から 1 まで積分すると，

$$\int_0^1\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-kx}\,dx-\int_0^1\frac{1}{1+e^{-x}}dx=\int_0^1\frac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$\displaystyle\int_0^1\frac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx=(-1)^n\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx$ となり，

$$\int_0^1\frac{1}{1+e^{-x}}dx=\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}dx=\Big[\log(e^x+1)\Big]_0^1=\log\frac{e+1}{2}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-kx}\,dx&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 e^{-kx}dx\\&=(-1)^0\int_0^1 e^0\,dx+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\int_0^1 e^{-kx}dx\\&=1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\Big[\frac{e^{-kx}}{-k}\Big]_0^1=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k}\end{aligned}$$

②より，$\displaystyle 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k}-\log\frac{e+1}{2}=(-1)^n\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx$ となり，

$$S=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k}-(-1)^n\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx=\log\frac{e+1}{2}-1=\log\frac{e+1}{2e}$$

(3) $0\leqq x\leqq 1$ において，$1+e^{-x}\geqq 1$ より，

$$\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx\leqq\int_0^1 e^{-(n+1)x}dx=\Big[-\frac{e^{-(n+1)x}}{n+1}\Big]_0^1=\frac{1-e^{-(n+1)}}{n+1}\leqq\frac{1}{n+1}$$

すると，$\displaystyle\left|(-1)^n\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx\right|=\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx\leqq\frac{1}{n+1}$ から，$n\to\infty$ のとき，

$$\left|(-1)^n\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx\right|\to 0,\ (-1)^n\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx\to 0$$

ここで，(2)から，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k}=\log\frac{e+1}{2e}+(-1)^n\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx$ なので，

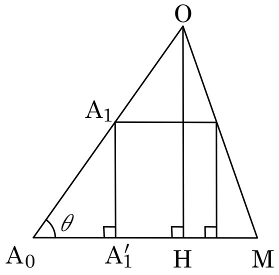
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k}=\log\frac{e+1}{2e}+\lim_{n\to\infty}(-1)^n\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx=\log\frac{e+1}{2e}$$

［解　説］

定積分と無限級数の融合問題です。細かく誘導がつけられているので，方針に迷うことはないでしょう。

3

問題のページへ



(1)　1 辺の長さが a_0 の正四面体 $OA_0B_0C_0$ に対して，辺 B_0C_0 の中点を M とし，3 点 O，A_0，M を含む平面で切断する。すると，点 O から平面 $A_0B_0C_0$ に下ろした垂線 OH はこの断面上にあり，図示すると右図のようになる。

さて，点 H は正三角形 $A_0B_0C_0$ の重心となるので，

$$A_0H=\frac{2}{3}AM=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a_0=\frac{\sqrt{3}}{3}a_0$$

ここで，$\theta=\angle OA_0H$ とすると，$OA_0=a_0$ より，

$$\cos\theta=\frac{A_0H}{OA_0}=\frac{\sqrt{3}}{3},\quad \sin\theta=\sqrt{1-\frac{3}{9}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

(2)　正四面体 $OA_1B_1C_1$ に対して $OA_1=A_1B_1=a_1$ となり，正三角柱 $A_1B_1C_1\text{-}A_1'B_1'C_1'$ に対して $A_1A_1'=A_1B_1=a_1$ である。

すると，$A_0A_1=OA_0-OA_1=a_0-a_1$ となり，$\sin\theta=\dfrac{a_1}{a_0-a_1}$ より，(1)から，

$$\frac{a_1}{a_0-a_1}=\frac{\sqrt{6}}{3},\quad 3a_1=\sqrt{6}(a_0-a_1),\quad (3+\sqrt{6})a_1=\sqrt{6}a_0$$

よって，$a_1=\dfrac{\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}}a_0=\dfrac{\sqrt{6}(3-\sqrt{6})}{9-6}a_0=(\sqrt{6}-2)a_0$ である。

(3)　(2)と同様にして，$a_{k+1}=(\sqrt{6}-2)a_k$ となり，$a_k=a_0(\sqrt{6}-2)^k$

これより，正三角柱 $A_kB_kC_k\text{-}A_k'B_k'C_k'$ の体積 V_k は，

$$V_k=\Big(\frac{1}{2}{a_k}^2\sin\frac{\pi}{3}\Big)a_k=\frac{\sqrt{3}}{4}{a_k}^3=\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{6}-2)^{3k}{a_0}^3$$

すると，$0<(\sqrt{6}-2)^3<1$ より，

$$\sum_{k=1}^{\infty}V_k=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{(\sqrt{6}-2)^3}{1-(\sqrt{6}-2)^3}{a_0}^3=\frac{\sqrt{3}(18\sqrt{6}-44)}{4(45-18\sqrt{6})}{a_0}^3=\frac{\sqrt{3}(9\sqrt{6}-22)}{18(5-2\sqrt{6})}{a_0}^3$$

$$=\frac{\sqrt{3}(9\sqrt{6}-22)(5+2\sqrt{6})}{18(25-24)}{a_0}^3=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{6}-2)}{18}{a_0}^3=\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{18}{a_0}^3$$

［解　説］

図形と無限級数の問題です。(2)はいろいろな方法が考えられますが，(1)の結果を利用すると，解答例のようになるでしょう。なお，(3)は数値計算がやや面倒です。

4

問題のページへ

(1)　正四面体のサイコロを2回ふったとき，1回目，2回目に出た目を，それぞれa，bとする。$\vec{v_1}=(1,\ 1,\ 1)$，$\vec{v_2}=(1,\ -1,\ -1)$，$\vec{v_3}=(-1,\ 1,\ -1)$，$\vec{v_4}=(-1,\ -1,\ 1)$に対して，$P_0=O$から$\overrightarrow{OP_2}=\vec{v_a}+\vec{v_b}$である。

このとき，点P_2がx軸上にあるのは，$(a,\ b)=(1,\ 2)$，$(2,\ 1)$，$(3,\ 4)$，$(4,\ 3)$のときであり，その確率は$\left(\frac{1}{4}\right)^2\times 4=\frac{1}{4}$となる。

(2)　(1)と同様に，点P_2がy軸上にあるのは，$(a,\ b)=(1,\ 3)$，$(3,\ 1)$，$(2,\ 4)$，$(4,\ 2)$のときであり，その確率は$\frac{1}{4}$である。

また，点P_2がz軸上にあるのは，$(a,\ b)=(1,\ 4)$，$(4,\ 1)$，$(2,\ 3)$，$(3,\ 2)$のときであり，その確率は$\frac{1}{4}$である。

さらに，$(a,\ b)=(1,\ 1)$では$P_2(2,\ 2,\ 2)$，$(a,\ b)=(2,\ 2)$では$P_2(2,\ -2,\ -2)$，$(a,\ b)=(3,\ 3)$では$P_2(-2,\ 2,\ -2)$，$(a,\ b)=(4,\ 4)$では$P_2(-2,\ -2,\ 2)$となる。

さて，サイコロを4回ふったとき，1回目，2回目，3回目，4回目に出た目を，それぞれa, b, c, dとすると，$\overrightarrow{P_0P_2}=\vec{v_a}+\vec{v_b}$，$\overrightarrow{P_2P_4}=\vec{v_c}+\vec{v_d}$となる。

すると，$\overrightarrow{P_2P_4}=\vec{v_c}+\vec{v_d}$についても$\overrightarrow{P_0P_2}=\vec{v_a}+\vec{v_b}$と同様に考えることができるので，$\overrightarrow{P_0P_2}\perp\overrightarrow{P_2P_4}$となるのは，次の場合である。

(a)　$\overrightarrow{P_0P_2}$がx軸に平行で，$\overrightarrow{P_2P_4}$がy軸に平行またはz軸に平行なとき
(b)　$\overrightarrow{P_0P_2}$がy軸に平行で，$\overrightarrow{P_2P_4}$がx軸に平行またはz軸に平行なとき
(c)　$\overrightarrow{P_0P_2}$がz軸に平行で，$\overrightarrow{P_2P_4}$がx軸に平行またはy軸に平行なとき

その確率は，$\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{8}$である。

(3)　(2)と同様に設定すると，$\overrightarrow{P_0P_1}=\vec{v_a}$，$\overrightarrow{P_1P_2}=\vec{v_b}$，$\overrightarrow{P_2P_3}=\vec{v_c}$となる。

これより，4点P_0，P_1，P_2，P_3が同一平面上にある条件は，$\vec{v_a}$，$\vec{v_b}$，$\vec{v_c}$が同一平面上のベクトルであることになる。

ここで，$\vec{v_a}$，$\vec{v_b}$，$\vec{v_c}$が同一平面上にないときを考えると，$\vec{v_1}$，$\vec{v_2}$，$\vec{v_3}$，$\vec{v_4}$から異なる3個のベクトルを選ぶとして，その確率は$\frac{{}_4C_3\cdot 3!}{4^3}=\frac{3}{8}$である。

よって，4点P_0，P_1，P_2，P_3が同一平面上にある確率は，$1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$となる。

(4)　サイコロをn回$(1\leqq n\leqq 6)$ふったとき，1, 2, 3, 4の目がそれぞれr回，s回，t回，u回だけ出て，$P_n=O$になったとすると，

$$r+s+t+u=n\cdots\cdots\cdots①,\ \ r\vec{v_1}+s\vec{v_2}+t\vec{v_3}+u\vec{v_4}=\vec{0}\cdots\cdots\cdots②$$

②より，$r+s-t-u=0$，$r-s+t-u=0$，$r-s-t+u=0$なので，

$$r=s=t=u\cdots\cdots\cdots③$$

③を①に代入すると$n=4r$となり，n が 4 の倍数のとき，すなわち$n=4$のときのみ$\mathrm{P}_n=\mathrm{O}$となる。

そこで，$\mathrm{P}_4=\mathrm{O}$については$r=s=t=u=1$から，その確率は，

$$4!\times\left(\frac{1}{4}\right)^4=\frac{3}{32}$$

また，$n\neq 4$のときは，$\mathrm{P}_n=\mathrm{O}$となる場合はない。

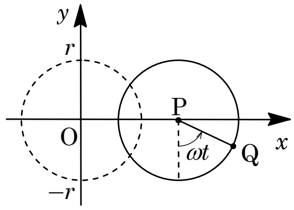
以上より，$\mathrm{P}_n=\mathrm{O}$となる確率は，$n=4$のとき$\dfrac{3}{32}$，$n\neq 4$のとき 0 である。

［解 説］

確率に空間ベクトルが融合した記述しにくい問題です。(3)では，余事象を利用して 1 次独立な 3 つのベクトルを選ぶ確率をもとに計算しましたが，場合分けをして直接的に求めても構いません。なお，理系のみの設問(4)については，(3)までの流れでは記述量が多くなりすぎるため，設定を変更しています。

$\boxed{5}$

問題のページへ



(1)　正の定数 r, c, ω に対し，条件より，時刻 t において，$\mathrm{P}(ct,\ 0)$ となるので，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\\ &=(ct,\ 0)+r\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\omega t\right),\ \sin\left(-\frac{\pi}{2}+\omega t\right)\right)\\ &=(ct,\ 0)+r(\sin\omega t,\ -\cos\omega t)\end{aligned}$$

ここで，$\mathrm{Q}(x(t),\ y(t))$ とおくと，$x(t)=ct+r\sin\omega t$，$y(t)=-r\cos\omega t$

(2)　(1)より，$x'(t)=c+r\omega\cos\omega t=r\omega\left(\cos\omega t+\dfrac{c}{r\omega}\right)$，$y'(t)=r\omega\sin\omega t$

(i)　$-\dfrac{c}{r\omega}\leqq -1$ $(c\geqq r\omega)$ のとき

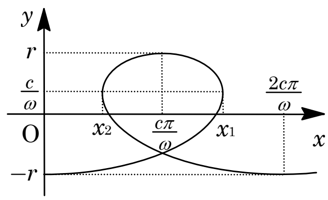
つねに $x'(t)\geqq 0$ となり，$x(t)$ は単調に増加する。これより，動点 Q の描く曲線は交差しない。

(ii)　$-1<-\dfrac{c}{r\omega}<0$ $(c<r\omega)$ のとき

$\cos u=-\dfrac{c}{r\omega}$ $(0\leqq u<2\pi)$ の解を $u=\alpha$，β $\left(\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi<\beta<\dfrac{3}{2}\pi\right)$ と設定する。

これをもとに，$0\leqq t\leqq\dfrac{2\pi}{\omega}$ における $x(t)$，$y(t)$ の値の変化をまとめると右表になる。なお，$x\left(\dfrac{\alpha}{\omega}\right)$，$x\left(\dfrac{\beta}{\omega}\right)$ の値は，それぞれ x_1，x_2 とおいている。

t	0	$\cdots$	$\dfrac{\alpha}{\omega}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{\omega}$	$\cdots$	$\dfrac{\beta}{\omega}$	$\cdots$	$\dfrac{2\pi}{\omega}$
$x'(t)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x(t)$	0	$\nearrow$	x_1	$\searrow$	$\dfrac{c\pi}{\omega}$	$\searrow$	x_2	$\nearrow$	$\dfrac{2c\pi}{\omega}$
$y'(t)$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0
$y(t)$	$-r$	$\nearrow$	$\dfrac{c}{\omega}$	$\nearrow$	r	$\searrow$	$\dfrac{c}{\omega}$	$\searrow$	$-r$



そこで，動点 Q の描く曲線の概形を図示すると，右図のようになり，このとき曲線は交差する。

(i)(ii)より，動点 Q の描く曲線が交差しない条件は，

$$c\geqq r\omega$$

［解 説］

パラメータ曲線が題材になっています。典型的な問題ですが，曲線の交差する条件という目新しさも加えられています。