1　解答解説のページへ

t を $0<t<1$ を満たす実数とする。OABC を 1 辺の長さが 1 の正四面体とする。辺 OA を $1-t:t$ に内分する点を P, 辺 OB を $t:1-t$ に内分する点を Q, 辺 BC の中点を R とする。また $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ を t，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　$\angle\mathrm{PQR}=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，t の値を求めよ。

(3)　t が(2)で求めた値をとるとき，$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積を求めよ。

2

解答解説のページへ

$f(x)=(2x-1)^3$ とする。数列 $\{x_n\}$ を次のように定める。

$x_1=2$ であり，x_{n+1} $(n\geqq 1)$ は点 $(x_n,\ f(x_n))$ における曲線 $y=f(x)$ の接線と x 軸の交点の x 座標とする。

以下の問いに答えよ。

(1)　点 $(t,\ f(t))$ における曲線 $y=f(x)$ の接線の方程式を求めよ。また $t\neq\dfrac{1}{2}$ のときに，その接線と x 軸の交点の x 座標を求めよ。

(2)　$x_n>\dfrac{1}{2}$ を示せ。また x_n を n の式で表せ。

(3)　$|x_{n+1}-x_n|<\dfrac{3}{4}\times 10^{-5}$ を満たす最小の n を求めよ。ただし $0.301<\log_{10}2<0.302$，$0.477<\log_{10}3<0.478$ は用いてよい。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

さいころを 3 回ふって，1 回目に出た目の数を a，2 回目と 3 回目に出た目の数の和を b とし，2 次方程式 $x^2-ax+b=0$ ……(∗)を考える。以下の問いに答えよ。

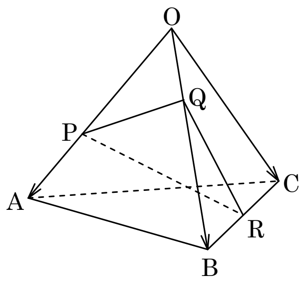
(1) (∗)が $x=1$ を解にもつ確率を求めよ。

(2) (∗)が整数を解にもつとする。このとき(∗)の解はともに正の整数であり，また少なくとも 1 つの解は 3 以下であることを示せ。

(3) (∗)が整数を解にもつ確率を求めよ。

$\boxed{1}$

問題のページへ



(1)　$\mathrm{OP}:\mathrm{PA}=1-t:t$，$\mathrm{OQ}:\mathrm{QB}=t:1-t$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\vec{a}-t\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})-t\vec{b}=\left(\frac{1}{2}-t\right)\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

(2)　正四面体 OABC は 1 辺の長さが 1 から，

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1^2\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

ここで，$\angle\mathrm{PQR}=\frac{\pi}{2}$ なので $\overrightarrow{\mathrm{QP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}=0$ となり，(1)から，

$$(1-t)\left(\frac{1}{2}-t\right)\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-t)\cdot\frac{1}{2}-t\left(\frac{1}{2}-t\right)\cdot1^2-\frac{1}{2}t\cdot\frac{1}{2}=0$$

まとめると，$6t^2-7t+2=0$ から $(3t-2)(2t-1)=0$ となり，$0<t<1$ より，

$$t=\frac{2}{3},\ \frac{1}{2}$$

(3)　(1)より，$|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|^2=(1-t)^2\cdot1^2-2t(1-t)\cdot\frac{1}{2}+t^2\cdot1^2=3t^2-3t+1$

$$|\overrightarrow{\mathrm{QR}}|^2=\left(\frac{1}{2}-t\right)^2\cdot1^2+2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-t\right)\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot1^2=t^2-\frac{3}{2}t+\frac{3}{4}$$

(i)　$t=\frac{2}{3}$ のとき

$|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|^2=\frac{1}{3}$，$|\overrightarrow{\mathrm{QR}}|^2=\frac{7}{36}$ となり，このとき，$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{7}}{6}=\frac{\sqrt{21}}{36}$ である。

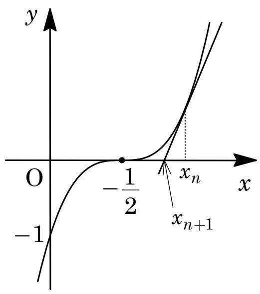
(ii)　$t=\frac{1}{2}$ のとき

$|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|^2=\frac{1}{4}$，$|\overrightarrow{\mathrm{QR}}|^2=\frac{1}{4}$ となり，このとき，$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$ である。

［解　説］

空間ベクトルの図形への応用に関する基本的な問題です。

$\boxed{2}$ 問題のページへ



(1)　$f(x)=(2x-1)^3$ に対して，$f'(x)=6(2x-1)^2$ となり，点 $(t,\ f(t))$ における曲線 $y=f(x)$ の接線の方程式は,

$$y-(2t-1)^3=6(2t-1)^2(x-t)$$
$$y=6(2t-1)^2x-6t(2t-1)^2+(2t-1)^3$$
$$=6(2t-1)^2x-(2t-1)^2(4t+1)\cdots\cdots\cdots①$$

$t\neq\frac{1}{2}$ のとき，①と x 軸の交点の x 座標は,

$$6(2t-1)^2x-(2t-1)^2(4t+1)=0$$

すると，$6x-(4t+1)=0$ から，$x=\frac{2}{3}t+\frac{1}{6}$ となる。

(2)　(1)より，数列 $\{x_n\}$ は，$x_1=2$，$x_{n+1}=\frac{2}{3}x_n+\frac{1}{6}\cdots\cdots②$と定義できる。

②を変形すると，$x_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{2}{3}\left(x_n-\frac{1}{2}\right)$となり,

$$x_n-\frac{1}{2}=\left(x_1-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\left(2-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$$

よって，$x_n-\frac{1}{2}>0$ から $x_n>\frac{1}{2}$ となり，$x_n=\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$ である。

(3)　(2)より，$\left|x_{n+1}-x_n\right|=\left|\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\right|=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left|1-\frac{3}{2}\right|=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

条件より，$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}<\frac{3}{4}\times10^{-5}$ となり，$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}<\frac{3}{2}\times10^{-5}$ から,

$$(n-1)(\log_{10}2-\log_{10}3)<\log_{10}3-\log_{10}2-5$$
$$n-1>\frac{\log_{10}3-\log_{10}2-5}{\log_{10}2-\log_{10}3}=-1+\frac{5}{\log_{10}3-\log_{10}2}$$

よって，$n>\frac{5}{\log_{10}3-\log_{10}2}\cdots\cdots\cdots③$

ここで，$0.301<\log_{10}2<0.302$，$0.477<\log_{10}3<0.478$ から,

$$0.175<\log_{10}3-\log_{10}2<0.177$$

すると，$28.2<\frac{5}{\log_{10}3-\log_{10}2}<28.6$ となり，③を満たす最小の n は 29 である。

［解 説］

よく見かける構図の漸化式の応用問題です。また, (3)の対数計算も難しくはありません。なお, $f'(x)$ を求めるときに, 一般的に, a と b を定数, n を自然数とするとき, $\left\{(ax+b)^n\right\}'=n(ax+b)^{n-1}\cdot a$ であることを利用しています。やや範囲外ですが。

3

問題のページへ

(1)　2 次方程式 $x^2-ax+b=0$……(*)が $x=1$ を解にもつ条件は,

$1-a+b=0$，$a=1+b$………①

ここで，さいころを 3 回ふって，1 回目に出た目の数が a，2 回目と 3 回目に出た目の数の和が b である。そこで，2 回目と 3 回目の目の数とその和 b の値をまとめると右表のようになる。

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

すると，$b\geqq 2$ より，①から $a\geqq 3$ となり，

(i)　$(a,\ b)=(3,\ 2)$ のとき

目の出方は，表より 1 通り。

(ii)　$(a,\ b)=(4,\ 3)$ のとき

目の出方は，表より 2 通り。

(iii)　$(a,\ b)=(5,\ 4)$ のとき　目の出方は，表より 3 通り。

(iv)　$(a,\ b)=(6,\ 5)$ のとき　目の出方は，表より 4 通り。

(i)～(iv)より，求める確率は，$\dfrac{1+2+3+4}{6^3}=\dfrac{5}{108}$ である。

(2)　(*)が整数解をもつとき，その解を $x=\alpha,\ \beta\ \ (\alpha\leqq\beta)$ とすると，

$a=\alpha+\beta$………②，$b=\alpha\beta$………③

すると，α，β はともに整数となり，さらに $a>0$，$b>0$ なので，②③より $\alpha>0$ かつ $\beta>0$ である。

また，$\alpha\leqq\beta$ から $2\alpha=\alpha+\alpha\leqq\alpha+\beta$ で，②から $\alpha+\beta\leqq 6$ なので，$2\alpha\leqq 6$ すなわち $\alpha\leqq 3$ となる。したがって，少なくとも 1 つの解は 3 以下である。

(3)　(*)が整数解 $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha\leqq\beta)$ をもつとき，$1\leqq\alpha\leqq\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{a}{2}$……④に注意して，$a$ の値で場合分けをする。

(i)　$a=1$ のとき　④から整数 α は存在しない。

(ii)　$a=2$ のとき　④から $\alpha=1$，②から $\beta=1$，③から $b=1$ となり，不適である。

(iii)　$a=3$ のとき　④から $\alpha=1$，②から $\beta=2$，③から $b=2$ となる。

すると，(1)の表より 1 通り。

(iv)　$a=4$ のとき　④から $\alpha=1,\ 2$ となる。

(iv-a)　$\alpha=1$ のとき　②から $\beta=3$，③から $b=3$ となるので，表より 2 通り。

(iv-b)　$\alpha=2$ のとき　②から $\beta=2$，③から $b=4$ となるので，表より 3 通り。

(v)　$a=5$ のとき　④から $\alpha=1,\ 2$ となる。

(v-a)　$\alpha=1$ のとき　②から $\beta=4$，③から $b=4$ となるので，表より 3 通り。

(v-b)　$\alpha=2$ のとき　②から $\beta=3$，③から $b=6$ となるので，表より 5 通り。

(vi) $a=6$ のとき　④から $\alpha=1,\ 2,\ 3$ となる。

(v-a)　$\alpha=1$ のとき　②から $\beta=5$，③から $b=5$ となるので，表より 4 通り。

(v-b)　$\alpha=2$ のとき　②から $\beta=4$，③から $b=8$ となるので，表より 5 通り。

(v-c)　$\alpha=3$ のとき　②から $\beta=3$，③から $b=9$ となるので，表より 4 通り。

(i)～(vi)より，求める確率は，$\dfrac{1+(2+3)+(3+5)+(4+5+4)}{6^3}=\dfrac{1}{8}$ である。

［解　説］

2 次方程式の解が絡んだ形の確率の問題です。解答例からもわかるように，丁寧に場合分けをするタイプです。なお，(3)は(1)と同じく，a の値を基準に場合分けをしています。