1

解答解説のページへ

t を $0<t<1$ を満たす実数とする。OABC を 1 辺の長さが 1 の正四面体とする。辺 OA を $1-t:t$ に内分する点を P，辺 OB を $t:1-t$ に内分する点を Q，辺 BC の中点を R とする。また $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ を t，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　$\angle\mathrm{PQR}=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，t の値を求めよ。

(3)　t が(2)で求めた値をとるとき，$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積を求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

k を 2 以上の整数とする。また，$f(x)=\dfrac{1}{k}\left((k-1)x+\dfrac{1}{x^{k-1}}\right)$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$x>0$ において，関数 $y=f(x)$ の増減と漸近線を調べてグラフの概形をかけ。

(2)　数列 $\{x_n\}$ が $x_1>1$，$x_{n+1}=f(x_n)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を満たすとき，$x_n>1$ を示せ。

(3)　(2)の数列 $\{x_n\}$ に対し，$x_{n+1}-1<\dfrac{k-1}{k}(x_n-1)$ を示せ。また $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n$ を求めよ。

3

解答解説のページへ

さいころを 3 回ふって，1 回目に出た目の数を a，2 回目と 3 回目に出た目の数の和を b とし，2 次方程式 $x^2-ax+b=0$ ……(＊)を考える。以下の問いに答えよ。

(1) (＊)が $x=1$ を解にもつ確率を求めよ。

(2) (＊)が整数を解にもつとする。このとき(＊)の解はともに正の整数であり，また少なくとも 1 つの解は 3 以下であることを示せ。

(3) (＊)が整数を解にもつ確率を求めよ。

4

解答解説のページへ

整式$f(x)$は実数を係数にもつ 3 次式で，3 次の係数は 1，定数項は-3とする。方程式$f(x)=0$は，1 と虚数α，βを解にもつとし，αの実部は 1 より大きく，αの虚部は正とする。複素数平面上でα，β，1が表す点を順に A, B, C とし，原点を O とする。以下の問いに答えよ。

(1)　αの絶対値を求めよ。

(2)　θをαの偏角とする。△ABC の面積Sをθを用いて表せ。

(3)　Sを最大にするθ $(0\leqq\theta<2\pi)$とそのときの整式$f(x)$を求めよ。

5

解答解説のページへ

座標空間において，O を原点とし，A$(2,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 2,\ 0)$，C$(1,\ 1,\ 0)$とする。△OAB を直線 OC のまわりに 1 回転してできる回転体を L とする。以下の問いに答えよ。

(1) 直線 OC 上にない点 P$(x,\ y,\ z)$から直線 OC に下ろした垂線を PH とする。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{HP}}$ を x, y, z の式で表せ。

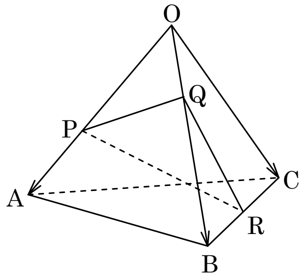
(2) P$(x,\ y,\ z)$が L 上の点であるための条件は，$z^2 \leqq 2xy$ かつ $0 \leqq x+y \leqq 2$ であることを示せ。

(3) $1 \leqq a \leqq 2$ とする。L を平面 $x=a$ で切った切り口の面積 $S(a)$ を求めよ。

(4) 立体 $\{(x,\ y,\ z) \mid (x,\ y,\ z) \in L,\ 1 \leqq x \leqq 2\}$ の体積を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　$\mathrm{OP}:\mathrm{PA}=1-t:t$，$\mathrm{OQ}:\mathrm{QB}=t:1-t$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\vec{a}-t\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})-t\vec{b}=\left(\frac{1}{2}-t\right)\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

(2)　正四面体 OABC は 1 辺の長さが 1 から,

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1^2\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

ここで，$\angle\mathrm{PQR}=\frac{\pi}{2}$ なので $\overrightarrow{\mathrm{QP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}=0$ となり，(1)から，

$$(1-t)\left(\frac{1}{2}-t\right)\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-t)\cdot\frac{1}{2}-t\left(\frac{1}{2}-t\right)\cdot1^2-\frac{1}{2}t\cdot\frac{1}{2}=0$$

まとめると，$6t^2-7t+2=0$ から $(3t-2)(2t-1)=0$ となり，$0<t<1$ より，

$$t=\frac{2}{3},\ \frac{1}{2}$$

(3)　(1)より，$|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|^2=(1-t)^2\cdot1^2-2t(1-t)\cdot\frac{1}{2}+t^2\cdot1^2=3t^2-3t+1$

$$|\overrightarrow{\mathrm{QR}}|^2=\left(\frac{1}{2}-t\right)^2\cdot1^2+2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-t\right)\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot1^2=t^2-\frac{3}{2}t+\frac{3}{4}$$

(i)　$t=\frac{2}{3}$ のとき

$|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|^2=\frac{1}{3}$，$|\overrightarrow{\mathrm{QR}}|^2=\frac{7}{36}$ となり，このとき，$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{7}}{6}=\frac{\sqrt{21}}{36}$ である。

(ii)　$t=\frac{1}{2}$ のとき

$|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|^2=\frac{1}{4}$，$|\overrightarrow{\mathrm{QR}}|^2=\frac{1}{4}$ となり，このとき，$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$ である。

［解 説］

空間ベクトルの図形への応用に関する基本的な問題です。

2

問題のページへ

(1)　k を 2 以上の整数とし，$f(x)=\dfrac{1}{k}\left((k-1)x+\dfrac{1}{x^{k-1}}\right)\ (x>0)$ に対して，

$$f'(x)=\frac{1}{k}\left(k-1-\frac{k-1}{x^k}\right)=\frac{k-1}{k}\cdot\frac{x^k-1}{x^k}$$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	1	↗

これより，$f(x)$ の増減は右表のようになる。

また，$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ であり，

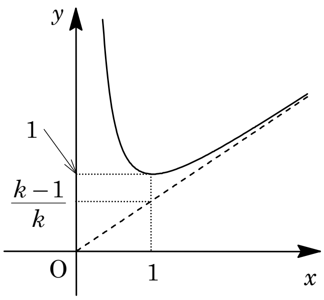
$x\to\infty$ のとき，漸近線 $y=ax+b$ の存在を仮定すると，

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{k}\left(k-1+\frac{1}{x^k}\right)=\frac{k-1}{k}$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-\frac{k-1}{k}x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{x^{k-1}}=0$$

よって，漸近線は，$x=0$ および $y=\dfrac{k-1}{k}x$ となり，

$y=f(x)$ のグラフの概形は右図のようになる。



(2)　$x_1>1$，$x_{n+1}=f(x_n)$ のとき，$x_n>1$ であることを数学的帰納法によって示す。

(i)　$n=1$ のとき　$x_1>1$ より成立する。

(ii)　$n=l$ のとき　$x_l>1$ と仮定すると, (1)から $x_{l+1}=f(x_l)>1$ となる。

よって，$n=l+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，$x_n>1$ である。

(3)　$x_{n+1}=f(x_n)$，$1=f(1)$ より，$x_{n+1}-1=f(x_n)-f(1)$ ………①

ここで，$x_n>1$ のとき，平均値の定理より，ある $c_n\ (1<c_n<x_n)$ において，

$$f(x_n)-f(1)=f'(c_n)(x_n-1)\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$x_{n+1}-1=f'(c_n)(x_n-1)$ となるので,

$$x_{n+1}-1=\frac{k-1}{k}\cdot\frac{c_n^k-1}{c_n^k}(x_n-1)=\frac{k-1}{k}\left(1-\frac{1}{c_n^k}\right)(x_n-1)$$

さらに，$k\geqq 2$ で $0<1-\dfrac{1}{c_n^k}<1$ から，$x_{n+1}-1<\dfrac{k-1}{k}(x_n-1)$ ………③

すると，$x_n-1>0$ であり，③から $n\geqq 2$ において，

$$0<x_n-1<(x_1-1)\left(\frac{k-1}{k}\right)^{n-1}\ \cdots\cdots\cdots④$$

よって，$0<\dfrac{k-1}{k}<1$ から，④より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(x_n-1)=0$ すなわち $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=1$ である。

［解　説］

非常に丁寧な誘導のついた数列の極限問題です。(1)で問われている斜めの漸近線, (3)の平均値の定理の利用については, 必須技法の 1 つです。

3　問題のページへ

(1) 2 次方程式 $x^2 - ax + b = 0$ ……(＊)が $x=1$ を解にもつ条件は,

　$1 - a + b = 0$, $a = 1 + b$ ………①

　ここで, さいころを 3 回ふって, 1 回目に出た目の数が a, 2 回目と 3 回目に出た目の数の和が b である。そこで, 2 回目と 3 回目の目の数とその和 b の値をまとめると右表のようになる。

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

　すると, $b \geqq 2$ より, ①から $a \geqq 3$ となり,

(i)　$(a,\ b) = (3,\ 2)$ のとき

　目の出方は, 表より 1 通り。

(ii)　$(a,\ b) = (4,\ 3)$ のとき

　目の出方は, 表より 2 通り。

(iii) $(a,\ b) = (5,\ 4)$ のとき　目の出方は, 表より 3 通り。

(iv) $(a,\ b) = (6,\ 5)$ のとき　目の出方は, 表より 4 通り。

(i)～(iv)より, 求める確率は, $\dfrac{1+2+3+4}{6^3} = \dfrac{5}{108}$ である。

(2) (＊)が整数解をもつとき, その解を $x = \alpha,\ \beta\ \ (\alpha \leqq \beta)$ とすると,

　$a = \alpha + \beta$ ………②, $b = \alpha\beta$ ………③

　すると, α, β はともに整数となり, さらに $a > 0$, $b > 0$ なので, ②③より $\alpha > 0$ かつ $\beta > 0$ である。

　また, $\alpha \leqq \beta$ から $2\alpha = \alpha + \alpha \leqq \alpha + \beta$ で, ②から $\alpha + \beta \leqq 6$ なので, $2\alpha \leqq 6$ すなわち $\alpha \leqq 3$ となる。したがって, 少なくとも 1 つの解は 3 以下である。

(3) (＊)が整数解 $x = \alpha,\ \beta\ (\alpha \leqq \beta)$ をもつとき, $1 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\alpha+\beta}{2} = \dfrac{a}{2}$ ……④に注意して, a の値で場合分けをする。

(i)　$a = 1$ のとき　④から整数 α は存在しない。

(ii)　$a = 2$ のとき　④から $\alpha = 1$, ②から $\beta = 1$, ③から $b = 1$ となり, 不適である。

(iii)　$a = 3$ のとき　④から $\alpha = 1$, ②から $\beta = 2$, ③から $b = 2$ となる。

　すると, (1)の表より 1 通り。

(iv)　$a = 4$ のとき　④から $\alpha = 1,\ 2$ となる。

　(iv-a)　$\alpha = 1$ のとき　②から $\beta = 3$, ③から $b = 3$ となるので, 表より 2 通り。

　(iv-b)　$\alpha = 2$ のとき　②から $\beta = 2$, ③から $b = 4$ となるので, 表より 3 通り。

(v)　$a = 5$ のとき　④から $\alpha = 1,\ 2$ となる。

　(v-a)　$\alpha = 1$ のとき　②から $\beta = 4$, ③から $b = 4$ となるので, 表より 3 通り。

　(v-b)　$\alpha = 2$ のとき　②から $\beta = 3$, ③から $b = 6$ となるので, 表より 5 通り。

(vi)　$a=6$ のとき　④から $\alpha=1,\ 2,\ 3$ となる。

(v-a)　$\alpha=1$ のとき　②から $\beta=5$，③から $b=5$ となるので，表より 4 通り。

(v-b)　$\alpha=2$ のとき　②から $\beta=4$，③から $b=8$ となるので，表より 5 通り。

(v-c)　$\alpha=3$ のとき　②から $\beta=3$，③から $b=9$ となるので，表より 4 通り。

(i)～(vi)より，求める確率は，$\dfrac{1+(2+3)+(3+5)+(4+5+4)}{6^3}=\dfrac{1}{8}$ である。

［解　説］

2 次方程式の解が絡んだ形の確率の問題です。解答例からもわかるように，丁寧に場合分けをするタイプです。なお，(3)は(1)と同じく，a の値を基準に場合分けをしています。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　条件より，a，b を実数として，$f(x)=x^3+ax^2+bx-3$ とおくと，$f(x)=0$ は $x=1$ を解にもつことから，$f(1)=0$ となり，

$$1+a+b-3=0\,,\ b=-a+2$$

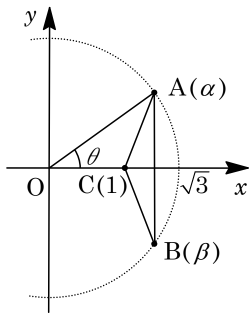
すると，$f(x)=x^3+ax^2+(-a+2)x-3=(x-1)\{x^2+(a+1)x+3\}$ ………①

さらに，$f(x)=0$ は虚数解 $x=\alpha$，β をもつことから，$\beta=\overline{\alpha}$ となり，①より，

$$x^2+(a+1)x+3=(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})\ \cdots\cdots\cdots ②$$

②より，$\alpha\overline{\alpha}=3$ すなわち $|\alpha|^2=3$ となり，$|\alpha|=\sqrt{3}$ である。

(2)　(1)から $|\alpha|=\sqrt{3}$，また $\arg\alpha=\theta$ とおくと，α の実部が 1 より大で虚部が正から，△ABC は右図のような配置になり，



$$\alpha=\sqrt{3}(\cos\theta+i\sin\theta)\text{，}\ \beta=\sqrt{3}(\cos\theta-i\sin\theta)$$

すると，△ABC の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\sin\theta(\sqrt{3}\cos\theta-1)=\sin\theta(3\cos\theta-\sqrt{3})$$

(3)　θ_0 を $\cos\theta_0=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす第 1 象限の角とし，$0<\theta<\theta_0$ において，(2)から，

$$S'=\cos\theta(3\cos\theta-\sqrt{3})-3\sin^2\theta=3\cos^2\theta-\sqrt{3}\cos\theta-3(1-\cos^2\theta)$$
$$=6\cos^2\theta-\sqrt{3}\cos\theta-3=(2\cos\theta-\sqrt{3})(3\cos\theta+\sqrt{3})$$

ここで，$\dfrac{1}{\sqrt{3}}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ から $\cos\theta_0<\cos\dfrac{\pi}{6}$ となり，$\theta_0>\dfrac{\pi}{6}$ より S の増減は右表のようになる。

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	θ_0
S'		$+$	0	$-$	
S		$\nearrow$		$\searrow$	

すると，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき S は最大になる。

このとき，$\alpha=\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ となり，②から，

$$a+1=-(\alpha+\overline{\alpha})=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=-3$$

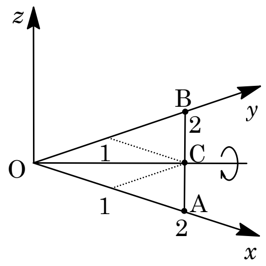
よって，$a=-4$ となり，①から $f(x)=x^3-4x^2+6x-3$ である。

［解　説］

3 次方程式に複素数平面を絡めた融合問題です。複雑な場合分けが生じないように，配慮された問題設定となっています。

$\boxed{5}$

問題のページへ



(1)　点 H は直線 OC 上の点なので，t を実数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=t\overrightarrow{\mathrm{OC}}=t(1,\ 1,\ 0)=(t,\ t,\ 0)$$

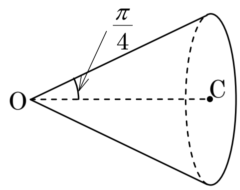
また，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x,\ y,\ z)$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{HP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(x-t,\ y-t,\ z)$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{HP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ から $\overrightarrow{\mathrm{HP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$ となり，

$$(x-t)+(y-t)=0$$

よって，$t=\dfrac{x+y}{2}$ から，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\left(\dfrac{x+y}{2},\ \dfrac{x+y}{2},\ 0\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{HP}}=\left(\dfrac{x-y}{2},\ \dfrac{-x+y}{2},\ z\right)$



(2)　$\angle\mathrm{AOC}=\angle\mathrm{BOC}=\dfrac{\pi}{4}$ から，回転体 L は，線分 OC を中心軸とし，母線と中心軸のなす角が $\dfrac{\pi}{4}$ の直円錐（内部を含む）を表す。そして，点 P が L 上の点であるための条件は，

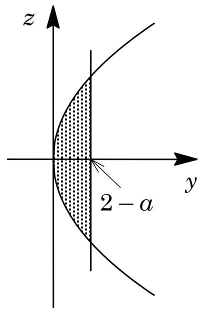
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\geqq|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos\frac{\pi}{4}\ \cdots\cdots\cdots①$$

$$0\leqq x+y\leqq 2\ \cdots\cdots\cdots②$$

①より，$x+y\geqq\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となり，$(x+y)^2\geqq x^2+y^2+z^2$

$$z^2\leqq 2xy\ \cdots\cdots\cdots③$$

よって，②③より，$z^2\leqq 2xy$ かつ $0\leqq x+y\leqq 2$ である。



(3)　L を平面 $x=a\ (1\leqq a\leqq 2)$ で切った切り口は，③より，

$$z^2\leqq 2ay\ \cdots\cdots\cdots④$$

②より $0\leqq a+y\leqq 2$ から，$-a\leqq y\leqq 2-a\ \cdots\cdots\cdots⑤$

そして，④⑤を平面 $x=a$ 上に図示すると右図の網点部になり，その面積を $S(a)$ とおくと，y 軸に関する対称性から，

$$S(a)=2\int_0^{2-a}\sqrt{2ay}\,dy=2\sqrt{2a}\left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^{2-a}$$

$$=\frac{4}{3}\sqrt{2a}\,(2-a)\sqrt{2-a}=\frac{4}{3}\sqrt{2}\,(2-a)\sqrt{a(2-a)}$$

(4)　立体 $\{(x,\ y,\ z)\,|\,(x,\ y,\ z)\in L,\ 1\leqq x\leqq 2\}$ の体積を V とすると，

$$V=\int_1^2 S(a)da=\frac{4}{3}\sqrt{2}\int_1^2(2-a)\sqrt{a(2-a)}\,da$$

ここで，$I=\displaystyle\int_1^2(2-a)\sqrt{a(2-a)}\,da$ とおくと，

$$I=\int_1^2(2-a)\sqrt{2a-a^2}\,da=\int_1^2(2-a)\sqrt{-(a-1)^2+1}\,da$$

さらに，$s=a-1$ とおくと，$ds=da$ となり，

$$I=\int_0^1(1-s)\sqrt{1-s^2}\,ds=\int_0^1\sqrt{1-s^2}\,ds-\int_0^1 s\sqrt{1-s^2}\,ds$$

そして，$\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-s^2}\,ds=\frac{1}{4}\pi\cdot 1^2=\frac{\pi}{4}$，また $u=1-s^2$ とおくと $du=-2sds$ から，

$$\int_0^1 s\sqrt{1-s^2}\,ds=-\frac{1}{2}\int_1^0\sqrt{u}\,du=\frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{1}{2}}\,du=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\Big[\,u^{\frac{3}{2}}\,\Big]_0^1=\frac{1}{3}$$

したがって，$I=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{3}$ となるので，$V=\dfrac{4}{3}\sqrt{2}\Big(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{3}\Big)=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi-\dfrac{4}{9}\sqrt{2}$ である。

［解　説］

立体の体積を求める問題です。たいへん詳しい誘導がついています。なお，回転体 L が直円錐であることは明らかなので，(2)では(1)の誘導を利用しませんでした。立式の詳細は「ピンポイント レクチャー」を参照してください。また，(3)では，この円錐を母線に平行に切っていますので，放物線が出現しています。