1　解答解説のページへ

$a,\ b,\ c$ を実数とし，$a \neq 0$ とする。2 次関数 $f(x)$ を $f(x) = ax^2 + bx + c$ で定める。曲線 $y = f(x)$ は点 $\left(2,\ 2 - \dfrac{c}{2}\right)$ を通り，$\displaystyle\int_0^3 f(x)dx = \dfrac{9}{2}$ を満たすとする。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ を a を用いて表せ。

(2) 点 $(1,\ f(1))$ における曲線 $y = f(x)$ の接線を l とする。直線 l の方程式を a を用いて表せ。

(3) $0 < a < \dfrac{1}{2}$ とする。(2)で求めた直線 l の $y \geqq 0$ の部分と曲線 $y = f(x)$ の $x \geqq 0$ の部分および x 軸で囲まれた図形の面積 S の最大値と，そのときの a の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

次のように 1, 3, 4 を繰り返し並べて得られる数列を$\{a_n\}$とする。

1，3，4，1，3，4，1，3，4，$\cdots$

すなわち，$a_1=1$，$a_2=3$，$a_3=4$ で，4 以上の自然数 n に対し，$a_n=a_{n-3}$とする。この数列の初項から第 n 項までの和をS_nとする。以下の問いに答えよ。

(1)　S_nを求めよ。

(2)　$S_n=2019$となる自然数nは存在しないことを示せ。

(3)　どのような自然数 k に対しても，$S_n=k^2$となる自然数 n が存在することを示せ。

3

解答解説のページへ

$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=2$ を満たす△PAB を考え，辺 AB の中点を M，△PAB の重心を G とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$\left|\overrightarrow{\mathrm{PM}}\right|^2$ を内積 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ を用いて表せ。

(2)　$\angle\mathrm{AGB}=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ の値を求めよ。

(3)　点 A と点 B を固定し，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\dfrac{5}{4}$ を満たすように点 P を動かすとき，$\angle\mathrm{ABG}$ の最大値を求めよ。ただし，$0<\angle\mathrm{ABG}<\pi$ とする。

1　　問題のページへ

(1)　関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ に対し，曲線 $y=f(x)$ が点 $\left(2,\ 2-\dfrac{c}{2}\right)$ を通ることより，

$$2-\frac{c}{2}=4a+2b+c,\ 8a+4b+3c=4\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，$\displaystyle\int_0^3 f(x)dx=\int_0^3(ax^2+bx+c)dx=\frac{9}{2}$ より，

$$\frac{a}{3}\cdot27+\frac{b}{2}\cdot9+c\cdot3=\frac{9}{2},\ 6a+3b+2c=3\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$2a+b=1$ となり，$b=-2a+1$

$$c=\frac{1}{2}(3-6a-3b)=\frac{1}{2}(3-6a+6a-3)=0$$

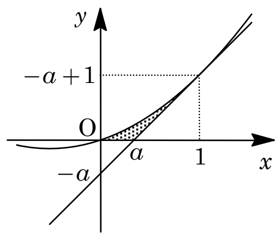
よって，$f(x)=ax^2-(2a-1)x$ である。

(2)　(1)より，$f'(x)=2ax-(2a-1)$ となり，$f'(1)=1$

すると，点 $(1,\ f(1))$ における曲線 $y=f(x)$ の接線 l の方程式は,

$$y-(-a+1)=1\cdot(x-1),\ y=x-a$$

(3)　$0<a<\dfrac{1}{2}$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と直線 l および x 軸で囲まれた右図の網点部の図形の面積 S は,



$$S=\int_0^1\{ax^2-(2a-1)x\}dx-\frac{1}{2}(1-a)^2$$
$$=\frac{a}{3}-\frac{2a-1}{2}-\frac{1}{2}(1-2a+a^2)$$
$$=-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{3}a=-\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{18}$$

よって，S の最大値は $\dfrac{1}{18}$ となり，このとき $a=\dfrac{1}{3}$ である。

［解 説］

微積分の基本題です。計算も穏やかです。

2

問題のページへ

(1)　1, 3, 4 を繰り返し並べて得られる周期 3 の数列$\{a_n\}$に対し，この初項から第 n 項までの和をS_nとする。ここで，$S_3=8$に注意して，lを 0 以上の整数とすると，

(i)　$n=3l+1$のとき　$S_{3l+1}=8l+1$より，$S_n=8\cdot\dfrac{n-1}{3}+1=\dfrac{8}{3}n-\dfrac{5}{3}$

(ii)　$n=3l+2$のとき　$S_{3l+2}=8l+4$より，$S_n=8\cdot\dfrac{n-2}{3}+4=\dfrac{8}{3}n-\dfrac{4}{3}$

(iii)　$n=3l+3$のとき　$S_{3l+3}=8(l+1)$より，$S_n=8\cdot\dfrac{n-3}{3}+8=\dfrac{8}{3}n$

(2)　$2019=8\times252+3$なので，以下$\mathrm{mod}\,8$で記すと，$2019\equiv3$である。

さて，(1)から，$n=3l+1$のとき$S_n\equiv1$，$n=3l+2$のとき$S_n\equiv4$，$n=3l+3$のとき$S_n\equiv0$である。

これより，$S_n=2019$となる自然数nは存在しない。

(3)　まず，任意の自然数kに対して，kとk^2を 8 で割った余りについて表にまとめると，右のようになり，

$$k^2\equiv0,\ 1,\ 4\pmod 8$$

また，(1)より，lを任意の 0 以上の整数とするとき，

$$S_{3l+1}=8l+1,\ S_{3l+2}=8l+4,\ S_{3l+3}=8(l+1)$$

すなわち，S_nは，8 で割ったときの余りが，1, 4, 0 であるすべての自然数を表す。

以上より，どのような自然数 k に対しても，$S_n=k^2$となる自然数nが存在する。

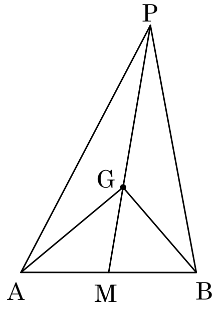
k	k^2
0	0
1	1
2	4
3	1
4	0
5	1
6	4
7	1

［解　説］

周期数列が題材の整数問題です。(2)は 3 つの場合について方程式を立ててもよいのですが，(3)との関連も考え，8 で割った余りに着目して処理をしています。

3

問題のページへ



(1)　△PABのABの中点Mに対し，$\overrightarrow{PM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})$ より，

$$|\overrightarrow{PM}|^2=\frac{1}{4}(|\overrightarrow{PA}|^2+2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+|\overrightarrow{PB}|^2)\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，△PABに余弦定理を適用すると，$|\overrightarrow{AB}|=2$ から，

$$4=|\overrightarrow{PA}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2-2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$|\overrightarrow{PM}|^2=\dfrac{1}{4}(2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+4+2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB})$ となり，

$$|\overrightarrow{PM}|^2=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+1\cdots\cdots\cdots③$$

(2)　$\angle AGB=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，△GABは斜辺が $AB=2$ の直角三角形より，

$$MG=MA=MB=1$$

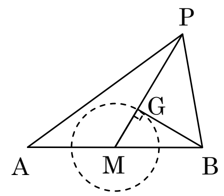
点Gは△PABの重心なので，$PM=3GM=3$ となり，③から，

$$9=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+1,\ \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=8$$

(3)　△PABにおいて，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\dfrac{5}{4}$ を満たすように点Pを動かすとき，③から，

$$|\overrightarrow{PM}|^2=\frac{5}{4}+1=\frac{9}{4},\ |\overrightarrow{PM}|=\frac{3}{2}$$

すると，$GM=\dfrac{1}{3}PM=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}$ となり，点Gは点Mを中心として，半径 $\dfrac{1}{2}$ の円を描く。



これより，∠ABGが最大になるのは，右図のように，BG がこの円に接するときである。このとき，$MB=1$，$MG=\dfrac{1}{2}$ から $\sin\angle ABG=\dfrac{1}{2}$ となり，$\angle ABG=\dfrac{\pi}{6}$ である。

［解　説］

平面ベクトルの図形への応用問題です。この問題にはいろいろな解法があり，たとえば, (1)では中線定理の利用, (2)では $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=0$ を変形する方法, (3)では座標系の設定などが考えられます。