1

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ の $x>0$ における最大値とそのときの x の値を求めよ。

(2) a を $a\neq 1$ を満たす正の実数とする。曲線 $y=e^x$ と曲線 $y=x^a\ (x>0)$ が共有点 P をもち，さらに点 P において共通の接線をもつとする。点 P の x 座標を t とするとき，a と t の値を求めよ。

(3) a と t を(2)で求めた実数とする。x を $x\neq t$ を満たす正の実数とするとき，e^x と x^a の大小を判定せよ。

2

解答解説のページへ

$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = 2$ を満たす△PAB を考え，辺 AB の中点を M，△PAB の重心を G とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\left|\overrightarrow{\mathrm{PM}}\right|^2$ を内積 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$ を用いて表せ。

(2) $\angle\mathrm{AGB} = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$ の値を求めよ。

(3) 点 A と点 B を固定し，$\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}} = \dfrac{5}{4}$ を満たすように点 P を動かすとき，$\angle\mathrm{ABG}$ の最大値を求めよ。ただし，$0 < \angle\mathrm{ABG} < \pi$ とする。

3

解答解説のページへ

n を 2 以上の整数とする。2 個のさいころを同時に投げるとき，出た目の数の積を n で割った余りが 1 となる確率を P_n とする。以下の問いに答えよ。

(1) P_2，P_3，P_4 を求めよ。

(2) $n \geqq 36$ のとき，P_n を求めよ。

(3) $P_n = \dfrac{1}{18}$ となる n をすべて求めよ。

4

解答解説のページへ

次のように 1, 3, 4 を繰り返し並べて得られる数列を$\{a_n\}$とする。

1，3，4，1，3，4，1，3，4，…

すなわち，$a_1=1$，$a_2=3$，$a_3=4$で，4 以上の自然数 n に対し，$a_n=a_{n-3}$とする。この数列の初項から第 n 項までの和をS_nとする。以下の問いに答えよ。

(1)　S_nを求めよ。

(2)　$S_n=2019$となる自然数nは存在しないことを示せ。

(3)　どのような自然数 k に対しても，$S_n=k^2$となる自然数 n が存在することを示せ。

5

解答解説のページへ

媒介変数表示 $x=\sin t$，$y=(1+\cos t)\sin t \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$ で表される曲線を C とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{dy}{dx}$ および $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を t の関数として表せ。

(2) C の凹凸を調べ, C の概形を描け。

(3) C で囲まれる領域の面積 S を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$f(x)=\dfrac{\log x}{x}\ (x>0)$ に対し，$f'(x)=\dfrac{1-\log x}{x^2}$

これより $f(x)$ の増減は右表のようになり，$f(x)$ は $x=e$ のとき最大値 $\dfrac{1}{e}$ をとる。

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$

(2)　$y=e^x$ ……①に対して $y'=e^x$，$y=x^a\ (x>0)$ ……②に対して $y'=ax^{a-1}$

ここで，2 つの曲線①と②は，x 座標が t の点 P で共有点をもち，しかも点 P で共通の接線をもつことから，

$$e^t=t^a\ \cdots\cdots\cdots③,\quad e^t=at^{a-1}\ \cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$t^a=at^{a-1}$ となり，$t>0$ から $t=a$ となる。

このとき，③から $e^a=a^a$ となり $a=e$ であり，この値は $a>0$ かつ $a\neq 1$ を満たす。

よって，$a=t=e$ である。

(3)　(1)より，$x\neq e$ において，$f(x)<\dfrac{1}{e}$ から，

$$\frac{\log x}{x}<\frac{1}{e},\quad x>e\log x$$

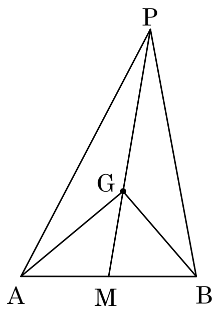
よって，$e^x>e^{e\log x}=e^{\log x^e}=x^e$ となり，$a=e$ から $e^x>x^a$ である。

［解 説］

微分の応用に関する基本題です。なお，(3)は結論が予測できますので，それを同値変形して方針を立てています。

2

問題のページへ



(1)　$\triangle$PAB の AB の中点 M に対し，$\overrightarrow{\mathrm{PM}}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}})$ より，

$$|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2=\frac{1}{4}(|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2)\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$\triangle$PAB に余弦定理を適用すると，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=2$ から，

$$4=|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2=\dfrac{1}{4}(2\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}+4+2\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}})$ となり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2=\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}+1\cdots\cdots\cdots③$$

(2)　$\angle\mathrm{AGB}=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\triangle$GAB は斜辺が $\mathrm{AB}=2$ の直角三角形より，

$$\mathrm{MG}=\mathrm{MA}=\mathrm{MB}=1$$

点 G は$\triangle$PAB の重心なので，$\mathrm{PM}=3\mathrm{GM}=3$ となり，③から，

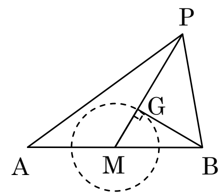
$$9=\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}+1,\ \overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=8$$

(3)　$\triangle$PAB において，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\dfrac{5}{4}$ を満たすように点 P を動かすとき，③から，

$$|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2=\frac{5}{4}+1=\frac{9}{4},\ |\overrightarrow{\mathrm{PM}}|=\frac{3}{2}$$

すると，$\mathrm{GM}=\dfrac{1}{3}\mathrm{PM}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}$ となり，点 G は点 M を中心として，半径 $\dfrac{1}{2}$ の円を描く。

これより，$\angle$ABG が最大になるのは，右図のように，BG がこの円に接するときである。このとき，$\mathrm{MB}=1$，$\mathrm{MG}=\dfrac{1}{2}$ から $\sin\angle\mathrm{ABG}=\dfrac{1}{2}$ となり，$\angle\mathrm{ABG}=\dfrac{\pi}{6}$ である。



［解　説］

平面ベクトルの図形への応用問題です。この問題にはいろいろな解法があり，たとえば, (1)では中線定理の利用, (2)では $\overrightarrow{\mathrm{GA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GB}}=0$ を変形する方法, (3)では座標系の設定などが考えられます。

3

問題のページへ

(1)　2 個のさいころの出た目の数とその積について，積を 2 で割った余りが 1 となるのは，右表から，$1\equiv 1\times 1 \pmod 2$ すなわち(奇数)×(奇数)の場合だけより，その確率 P_2 は，

$$P_2=\frac{3\times 3}{6^2}=\frac{1}{4}$$

mod 2	0	1
0	0	0
1	0	1

また，積を 3 で割った余りが 1 となるのは，右表から，$1\equiv 1\times 1 \pmod 3$ または $1\equiv 2\times 2 \pmod 3$，すなわち(3 の倍数＋1)×(3 の倍数＋1)の場合，または(3 の倍数＋2)×(3 の倍数＋2)の場合より，その確率 P_3 は，

$$P_3=\frac{2\times 2+2\times 2}{6^2}=\frac{2}{9}$$

mod 3	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

さらに，積を 4 で割った余りが 1 となるのは，右表から，$1\equiv 1\times 1 \pmod 4$ または $1\equiv 3\times 3 \pmod 4$，すなわち(4 の倍数＋1)×(4 の倍数＋1)の場合，または (4 の倍数＋3)×(4 の倍数＋3)の場合より，その確率 P_4 は，

$$P_4=\frac{2\times 2+1\times 1}{6^2}=\frac{5}{36}$$

mod 4	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

(2)　2 個のさいころの出た目の数とその積についてをまとめると，右表のようになる。

ここで，$n\geqq 37$ のとき，積を n で割った余りは右表で表され，これが 1 となるのは，1×1 の場合だけである。また，$n=36$ のときは，$0\equiv 6\times 6 \pmod{36}$ 以外は $n\geqq 37$ のときと同じなので，$n\geqq 36$ のとき積を n で割った余りが 1 となる確率 P_n は，$P_n=\dfrac{1\times 1}{6^2}=\dfrac{1}{36}$ である。

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

(3)　まず，(1)，(2)より，$P_n=\dfrac{1}{18}=\dfrac{2}{36}$ となる n は $5\leqq n\leqq 35$ の範囲にある。そして，1×1 は n で割った余りが必ず 1 になることより，条件を満たす n は，積を n で割った余りが 1 となるのが 1×1 以外にもう 1 組だけある数となる。

さて，(2)の表は，積の値が対角線に関して対称になっていることから，対角線上にない積については複数個の組が存在し，不適である。

これより，積を対角線上の値に絞り込み，さらに $n\geqq 5$ から積は 6 以上で考えればよいので，以下，積が 9, 16, 25, 36 という 4 通りの場合について調べる。

(i)　積が $9\,(9=8+1=2^3+1)$ のとき

$n=8$ とすると，積を n で割って 1 余る 1, 9 以外の数に 25 があり不適である。

(ii)　積が $16\,(16=15+1=3\times5+1)$ のとき

$n=5$ とすると，積を n で割って 1 余る 1, 16 以外の数に 6 があり不適である。

$n=15$ とすると，積を n で割って 1 余る 1, 16 以外の数はないので適する。

(iii) 積が $25\,(25=24+1=2^3\times3+1)$ のとき

$n=6$ とすると，積を n で割って 1 余る 1, 25 以外の数はないので適する。

$n=8$ とすると，積を n で割って 1 余る 1, 25 以外の数に 9 があり不適である。

$n=12$ とすると，積を n で割って 1 余る 1, 25 以外の数はないので適する。

$n=24$ とすると，積を n で割って 1 余る 1, 25 以外の数はないので適する。

(iv) 積が $36\,(36=35+1=5\times7+1)$ のとき

$n=5$ とすると，積を n で割って 1 余る 1, 36 以外の数に 6 があり不適である。

$n=7$ とすると，積を n で割って 1 余る 1, 36 以外の数に 15 があり不適である。

$n=35$ とすると，積を n で割って 1 余る 1, 36 以外の数はないので適する。

(i)～(iv)より，$P_n=\dfrac{1}{18}$ となる n は，$n=6,\ 12,\ 15,\ 24,\ 35$ である。

［解 説］

数え上げるタイプの確率問題です。(3)は(1)と(2)の結果を利用するものの，これだけでは調べるのに時間がかかりすぎます。絞り込む手を見つけなくてはいけません。

4

問題のページへ

(1)　1, 3, 4 を繰り返し並べて得られる周期 3 の数列$\{a_n\}$に対し，この初項から第 n 項までの和をS_nとする。ここで，$S_3=8$に注意して，lを 0 以上の整数とすると，

(i)　$n=3l+1$のとき　$S_{3l+1}=8l+1$より，$S_n=8\cdot\dfrac{n-1}{3}+1=\dfrac{8}{3}n-\dfrac{5}{3}$

(ii)　$n=3l+2$のとき　$S_{3l+2}=8l+4$より，$S_n=8\cdot\dfrac{n-2}{3}+4=\dfrac{8}{3}n-\dfrac{4}{3}$

(iii)　$n=3l+3$のとき　$S_{3l+3}=8(l+1)$より，$S_n=8\cdot\dfrac{n-3}{3}+8=\dfrac{8}{3}n$

(2)　$2019=8\times252+3$なので，以下$\mathrm{mod}\,8$で記すと，$2019\equiv3$である。

さて，(1)から，$n=3l+1$のとき$S_n\equiv1$，$n=3l+2$のとき$S_n\equiv4$，$n=3l+3$のとき$S_n\equiv0$である。

これより，$S_n=2019$となる自然数nは存在しない。

(3)　まず，任意の自然数kに対して，kとk^2を 8 で割った余りについて表にまとめると，右のようになり，

$$k^2\equiv0,\ 1,\ 4\pmod 8$$

また，(1)より，lを任意の 0 以上の整数とするとき，

$$S_{3l+1}=8l+1,\ S_{3l+2}=8l+4,\ S_{3l+3}=8(l+1)$$

すなわち，S_nは，8 で割ったときの余りが，1, 4, 0 であるすべての自然数を表す。

以上より，どのような自然数 k に対しても，$S_n=k^2$となる自然数nが存在する。

k	k^2
0	0
1	1
2	4
3	1
4	0
5	1
6	4
7	1

［解　説］

周期数列が題材の整数問題です。(2)は 3 つの場合について方程式を立ててもよいのですが，(3)との関連も考え，8 で割った余りに着目して処理をしています。

5

問題のページへ

(1) 曲線 C: $x=\sin t$, $y=(1+\cos t)\sin t$ $(0\leqq t\leqq\pi)$ に対して,

$$\frac{dx}{dt}=\cos t,\ \frac{dy}{dt}=-\sin^2 t+(1+\cos t)\cos t=2\cos^2 t+\cos t-1$$

これより, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2\cos^2 t+\cos t-1}{\cos t}$ となり, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\Big(\dfrac{dy}{dx}\Big)=\dfrac{d}{dt}\Big(\dfrac{dy}{dx}\Big)\cdot\dfrac{dt}{dx}$ から,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(-4\cos t\sin t-\sin t)\cos t-(2\cos^2 t+\cos t-1)(-\sin t)}{\cos^2 t}\cdot\frac{1}{\cos t}$$

$$=\frac{-2\cos^2 t\sin t-\sin t}{\cos^3 t}=\frac{-\sin t(2\cos^2 t+1)}{\cos^3 t}$$

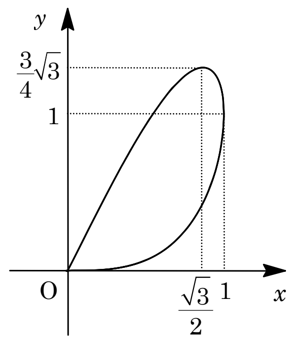
(2) (1)から, $0<t<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\dfrac{d^2y}{dx^2}<0$ なので C は上に凸, $\dfrac{\pi}{2}<t<\pi$ のとき $\dfrac{d^2y}{dx^2}>0$ なので C は下に凸である。

また $\dfrac{dy}{dt}=(2\cos t-1)(\cos t+1)$ に注意して, $0\leqq t\leqq\pi$ における x, y の増減を調べると, 右表のようになる。さらに $\dfrac{dy}{dx}$ について,

$$\lim_{t\to+0}\frac{dy}{dx}=2,\ \lim_{t\to\pi-0}\frac{dy}{dx}=0$$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{dt}$	1	$+$		$+$	0	$-$	-1
x	0	↗	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	1	↘	0
$\frac{dy}{dt}$	2	$+$	0	$-$		$-$	0
y	0	↗	$\frac{3}{4}\sqrt{3}$	↘	1	↘	0

以上より, C の概形は右下図のようになる。



(3) まず, $0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき $y=y_1(x)$, $\dfrac{\pi}{2}\leqq t\leqq\pi$ のとき $y=y_2(x)$ とおくと, C で囲まれる領域の面積 S は,

$$S=\int_0^1\{y_1(x)-y_2(x)\}dx$$

$$=\int_0^1 y_1(x)dx-\int_0^1 y_2(x)dx$$

ここで, 変数を x から t に置き換えて積分すると,

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos t)\sin t\cdot\cos t\,dt-\int_\pi^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos t)\sin t\cdot\cos t\,dt$$

$$=\int_0^\pi(\cos t+\cos^2 t)\sin t\,dt=\Big[-\frac{1}{2}\cos^2 t-\frac{1}{3}\cos^3 t\Big]_0^\pi=-\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot 2=\frac{2}{3}$$

［解　説］

パラメータ曲線で囲まれる領域の面積を求める頻出題です。計算はやや多めです。