

1

解答解説のページへ

a, b, c, p は実数とし、 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ は $(x-p)^2$ で割り切れるとする。以下の問いに答えよ。

- (1) b, c を a, p を用いて表せ。
- (2) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は、 $f'(p + \frac{4}{3}) = 0$ をみたすとする。 a を p を用いて表せ。
- (3) (2)の条件のもとで $p = 0$ とする。曲線 $y = f(x)$ と $y = f'(x)$ の交点を x 座標が小さい方から順に A, B, C とし、線分 AB と曲線 $y = f'(x)$ で囲まれた部分の面積を S_1 、線分 BC と曲線 $y = f'(x)$ で囲まれた部分の面積を S_2 とする。このとき、 $S_1 + S_2$ の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

n を自然数とし、数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を次の (i), (ii) で定める。

(i) $a_1 = b_1 = 1$ とする。

(ii) $f_n(x) = a_n(x+1)^2 + 2b_n$ とし、 $-2 \leq x \leq 1$ における $f_n(x)$ の最大値を a_{n+1} , 最小値を b_{n+1} とする。

以下の問いに答えよ。

- (1) すべての自然数 n について $a_n > 0$ かつ $b_n > 0$ であることを示せ。
- (2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。
- (3) $c_n = \frac{a_n}{2^n}$ とおく。数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

3

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

- (1) 和が 30 になる 2 つの自然数からなる順列の総数を求めよ。
- (2) 和が 30 になる 3 つの自然数からなる順列の総数を求めよ。
- (3) 和が 30 になる 3 つの自然数からなる組合せの総数を求めよ。

1

問題のページへ

(1) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ を $(x-p)^2$ で割ると,

$$f(x) = (x-p)^2(x+a+2p) + (2ap+b+3p^2)x + (-ap^2+c-2p^3)$$

条件より, $2ap+b+3p^2=0$ かつ $-ap^2+c-2p^3=0$ となり,

$$b = -2ap - 3p^2 \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad c = ap^2 + 2p^3 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

(2) $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ となり, $\textcircled{1}$ を代入し, $f'(p + \frac{4}{3}) = 0$ より,

$$3\left(p + \frac{4}{3}\right)^2 + 2a\left(p + \frac{4}{3}\right) - 2ap - 3p^2 = 0, \quad 8p + \frac{16}{3} + \frac{8}{3}a = 0$$

よって, $a = -3p - 2 \cdots \cdots \textcircled{3}$ となる。(3) $p=0$ のとき, $\textcircled{3}$ より $a = -2$, $\textcircled{1}\textcircled{2}$ より $b = c = 0$ となり,

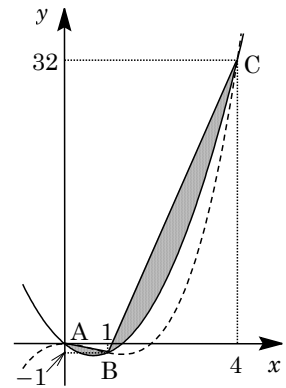
$$f(x) = x^3 - 2x^2, \quad f'(x) = 3x^2 - 4x$$

ここで, $y = f(x)$ と $y = f'(x)$ を連立すると,

$$x^3 - 2x^2 = 3x^2 - 4x, \quad x(x-1)(x-4) = 0$$

 $x = 0, 1, 4$ から, 曲線 $y = f(x)$ と $y = f'(x)$ の交点は,

$$A(0, 0), \quad B(1, -1), \quad C(4, 32)$$

すると, 直線 AB の方程式は $y = -x$, 直線 BC の方程式は $y = \frac{33}{3}(x-1) - 1 = 11x - 12$ となる。このとき, 線分 AB と曲線 $y = f'(x)$ で囲まれた部分の面積を S_1 , 線分 BC と曲線 $y = f'(x)$ で囲まれた部分の面積を S_2 とすると,

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 &= \int_0^1 \{-x - (3x^2 - 4x)\} dx + \int_1^4 \{(11x - 12) - (3x^2 - 4x)\} dx \\ &= \int_0^1 -3x(x-1) dx + \int_1^4 -3(x-1)(x-4) dx \\ &= -3\left(-\frac{1}{6}\right)(1-0)^3 - 3\left(-\frac{1}{6}\right)(4-1)^3 = \frac{1}{2} + \frac{27}{2} = 14 \end{aligned}$$

【解説】

整式の除法が絡んだ定積分と面積についての基本題です。いわゆる $\frac{1}{6}$ 公式を利用する典型的なタイプです。

2

問題のページへ

(1) すべての自然数 n について $a_n > 0$ かつ $b_n > 0$ であることを数学的帰納法で示す。

(i) $n=1$ のとき $a_1 = b_1 = 1$ より成立している。

(ii) $n=k$ のとき $a_k > 0$ かつ $b_k > 0$ と仮定する。

$-2 \leq x \leq 1$ における $f_k(x) = a_k(x+1)^2 + 2b_k$ の最大値 a_{k+1} , 最小値 b_{k+1} から,

$$a_{k+1} = f_k(1) = a_k(1+1)^2 + 2b_k = 4a_k + 2b_k \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$b_{k+1} = f_k(-1) = a_k(-1+1)^2 + 2b_k = 2b_k \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①②より, $a_{k+1} > 0$ かつ $b_{k+1} > 0$ となり, $n=k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より, すべての自然数 n について $a_n > 0$ かつ $b_n > 0$ である。

(2) ②より $b_{n+1} = 2b_n$ となり, $b_n = b_1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1} \cdots \cdots \textcircled{3}$

(3) ①③より, $a_{n+1} = 4a_n + 2b_n = 4a_n + 2^n \cdots \cdots \textcircled{4}$

ここで, $c_n = \frac{a_n}{2^n}$ とおくと $a_n = 2^n c_n$ となり, ④に代入すると,

$$2^{n+1}c_{n+1} = 4 \cdot 2^n c_n + 2^n, \quad c_{n+1} = 2c_n + \frac{1}{2}$$

この式を, $c_{n+1} + \frac{1}{2} = 2\left(c_n + \frac{1}{2}\right)$ と変形して,

$$c_n + \frac{1}{2} = \left(c_1 + \frac{1}{2}\right) \cdot 2^{n-1} = \left(\frac{a_1}{2^1} + \frac{1}{2}\right) \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

よって, $c_n = 2^{n-1} - \frac{1}{2}$ である。

[解説]

漸化式の基本題です。省エネで済むように、丁寧な誘導がついています。

3

問題のページへ

- (1) $a+b=30$ を満たす 2 つの自然数 a, b の順列 $\bigcirc \cdots \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \cdots \bigcirc$
 の総数は、右図のように 30 個の球を 1 列に並べ、 a 個 b 個
 その間の 29 か所のうち 1 か所を選んでしきりを入れ、しきりの左側の球の個数を a 、
 右側の球の個数を b に対応させると考えて、

$${}_{29}C_1 = 29 \quad (\text{個})$$

- (2) $a+b+c=30$ を満たす 3 つの自然数 a, b, c の $\bigcirc \cdots \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \cdots \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \cdots \bigcirc$
 順列の総数は、右図のように 30 個の球を 1 列に a 個 b 個 c 個
 並べ、その間の 29 か所のうち 2 か所を選んでしきりを入れ、左側のしきりの左側の
 球の個数を a 、2 つのしきりの間の球の個数を b 、右側のしきりの右側の球の個数を
 c に対応させると考えて、

$${}_{29}C_2 = \frac{29 \times 28}{2} = 406 \quad (\text{個})$$

- (3) $a+b+c=30$ を満たす 3 つの自然数 a, b, c の順列のうち、
 (i) a, b, c の 3 つが同じもの $(a, b, c) = (10, 10, 10)$ だけなので 1 個。
 (ii) a, b, c の 2 つだけが同じもの
 $\{a, b, c\} = \{1, 1, 28\}, \{2, 2, 28\}, \dots, \{9, 9, 12\}, \{11, 11, 8\}, \dots,$
 $\{14, 14, 2\}$ の 13 種類より、 (a, b, c) の個数は $13 \times 3 = 39$ 個。
 (iii) a, b, c がすべて異なるもの (a, b, c) の個数は $406 - (1 + 39) = 366$ 個。
 (i)(ii)(iii) より、 $a+b+c=30$ を満たす 3 つの自然数 a, b, c の組合せの総数は、

$$1 + \frac{39}{3} + \frac{366}{3!} = 1 + 13 + 61 = 75 \quad (\text{個})$$

[解説]

場合の数の頻出題です。(1)と(2)は、有名なテクニカルな方法で記しています。