

1

解答解説のページへ

$\alpha$  は実数とし、 $f(x)$  は係数が実数である 3 次式で、次の条件(i), (ii)をみたすとする。

(i)  $f(x)$  の  $x^3$  の係数は 1 である。

(ii)  $f(x)$  とその導関数  $f'(x)$  について、 $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$  が成り立つ。

以下の問いに答えよ。

(1)  $f(x)$  は  $(x - \alpha)^2$  で割り切れることを示せ。

(2)  $f(\alpha + 2) = 0$  とする。  $f'(x) = 0$  かつ  $x \neq \alpha$  をみたす  $x$  を  $\alpha$  を用いて表せ。

(3) (2)の条件のもとで  $\alpha = 0$  とする。  $xy$  平面において不等式

$$y \geq f(x) \quad \text{かつ} \quad y \geq f'(x) \quad \text{かつ} \quad y \leq 0$$

の表す部分の面積を求めよ。

2

解答解説のページへ

$\theta$  を  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  をみたす実数とし、原点  $O$ ,  $A(1, 0)$ ,  $B(\cos 2\theta, \sin 2\theta)$  を頂点とする  $\triangle OAB$  の内接円の中心を  $P$  とする。また、 $\theta$  がこの範囲を動くときに点  $P$  が描く曲線と線分  $OA$  によって囲まれた部分を  $D$  とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 点  $P$  の座標は  $(1 - \sin \theta, \frac{\sin \theta \cos \theta}{1 + \sin \theta})$  で表されることを示せ。
- (2)  $D$  を  $x$  軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

3

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

- (1) 和が 30 になる 2 つの自然数からなる順列の総数を求めよ。
- (2) 和が 30 になる 3 つの自然数からなる順列の総数を求めよ。
- (3) 和が 30 になる 3 つの自然数からなる組合せの総数を求めよ。

4

解答解説のページへ

$n$  を自然数とし,  $2n\pi \leq x \leq (2n+1)\pi$  に対して  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  とする。以下の問いに答えよ。

- (1)  $f(x)$  が最大となる  $x$  の値がただ 1 つ存在することを示せ。
- (2) (1) の  $x$  の値を  $x_n$  とする。このとき,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\tan x_n}$  を求めよ。

5

解答解説のページへ

$p$  を 2 以上の自然数とし, 数列  $\{x_n\}$  は

$$x_1 = \frac{1}{2^p + 1}, \quad x_{n+1} = |2x_n - 1| \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

をみたすとする。以下の問いに答えよ。

- (1)  $p = 3$  のとき,  $x_n$  を求めよ。
- (2)  $x_{p+1} = x_1$  であることを示せ。

1

問題のページへ

- (1)  $x^3$  の係数が 1 である 3 次式  $f(x)$  に対し,  $f(\alpha) = 0$  から因数定理を適用すると,  
 $f(x) = (x - \alpha)p(x)$  ( $p(x)$  は  $x^2$  の係数が 1 である 2 次式) ……①  
 ①より,  $f'(x) = p(x) + (x - \alpha)p'(x)$  となり,  $f'(\alpha) = 0$  から  $p(\alpha) = 0$  なので,

因数定理を適用すると,  
 $p(x) = (x - \alpha)q(x)$  ( $q(x)$  は  $x$  の係数が 1 である 1 次式) ……②

①②より,  $f(x) = (x - \alpha)^2 q(x)$  となり,  $f(x)$  は  $(x - \alpha)^2$  で割り切れる。

- (2)  $k$  を実数として,  $q(x) = x + k$  とおくと,  $f(x) = (x - \alpha)^2(x + k)$  ……③  
 すると,  $f(\alpha + 2) = 0$  から  $(\alpha + 2 - \alpha)^2(\alpha + 2 + k) = 0$  となり,  
 $4(\alpha + 2 + k) = 0, k = -\alpha - 2$

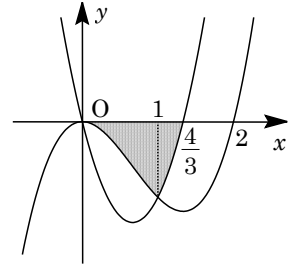
③から,  $f(x) = (x - \alpha)^2(x - \alpha - 2)$  ……④となり,  
 $f'(x) = 2(x - \alpha)(x - \alpha - 2) + (x - \alpha)^2 = (x - \alpha)(3x - 3\alpha - 4)$  ……⑤

ここで,  $f'(x) = 0$  かつ  $x \neq \alpha$  より,  $3x - 3\alpha - 4 = 0$  となり,  $x = \alpha + \frac{4}{3}$

- (3)  $\alpha = 0$  のとき, ④から  $f(x) = x^2(x - 2)$ , ⑤から  $f'(x) = x(3x - 4)$

ここで,  $y = f(x)$  と  $y = f'(x)$  を連立して,  
 $x^2(x - 2) = x(3x - 4), x(x^2 - 5x + 4) = 0$   
 $x(x - 1)(x - 4) = 0$

これより, 2 曲線の交点は,  $x = 0, 1, 4$  となる。  
 すると,  $y \geq f(x), y \geq f'(x), y \leq 0$  で表される領域  
 は右図の網点部となり, その面積  $S$  は,



$$S = -\int_0^1 (x^3 - 2x^2) dx - \int_1^{\frac{4}{3}} (3x^2 - 4x) dx = -\left[\frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3\right]_0^1 - \left[x^3 - 2x^2\right]_1^{\frac{4}{3}}$$

$$= -\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{64}{27} - \frac{32}{9}\right) + (1 - 2) = \frac{5}{12} + \frac{32}{27} - 1 = \frac{65}{108}$$

**[解説]**

微分法と因数定理および面積計算の組合せ問題です。(1)の結論については, その証明とともに記憶するに値します。

2

問題のページへ

(1)  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  のとき,  $O, A(1, 0), B(\cos 2\theta, \sin 2\theta)$  を

頂点とする  $\triangle OAB$  に対し, 内接円の中心を  $P$  とする。

まず, 直線  $OP$  は  $\angle AOB$  の二等分線なので,

$$\angle AOP = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \cdot 2\theta = \theta$$

また,  $OP$  の延長と  $AB$  の交点  $M$  とすると,  $OA = OB$  から  $OM \perp AB$  となり,

$$OM = OA \cos \theta = \cos \theta$$

そこで,  $OP = r$  ( $0 < r < \cos \theta$ ) とおくと,  $P(r \cos \theta, r \sin \theta)$  と表せる。

次に, 直線  $AP$  は  $\angle OAB$  の二等分線なので, 点  $P$  と  $x$  軸の距離と, 点  $P$  と直線  $AB$  の距離が等しくなり,  $r \sin \theta = \cos \theta - r$  から,

$$(1 + \sin \theta)r = \cos \theta, \quad r = \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta}$$

すると,  $r \cos \theta = \frac{\cos^2 \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{1 - \sin^2 \theta}{1 + \sin \theta} = 1 - \sin \theta$ ,  $r \sin \theta = \frac{\sin \theta \cos \theta}{1 + \sin \theta}$  となり,

$$P\left(1 - \sin \theta, \frac{\sin \theta \cos \theta}{1 + \sin \theta}\right)$$

(2)  $P(x, y)$  とおくと,  $x = 1 - \sin \theta$ ,  $y = \frac{\sin \theta \cos \theta}{1 + \sin \theta}$  であり,  $\frac{dx}{d\theta} = -\cos \theta < 0$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)(1 + \sin \theta) - \sin \theta \cos^2 \theta}{(1 + \sin \theta)^2} = -\frac{\sin^3 \theta + 2\sin^2 \theta - 1}{(1 + \sin \theta)^2}$$

$$= -\frac{(\sin \theta + 1)(\sin^2 \theta + \sin \theta - 1)}{(1 + \sin \theta)^2}$$

$$= -\frac{\sin^2 \theta + \sin \theta - 1}{1 + \sin \theta}$$

ここで,  $\sin \alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$  とおくと, 点  $P$  の  $x, y$  の増減は右表のようになる。

$\theta$	0	...	$\alpha$	...	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{d\theta}$		-		-	0
$x$	1	↘		↘	0
$\frac{dy}{d\theta}$		+	0	-	
$y$	0	↗		↘	0

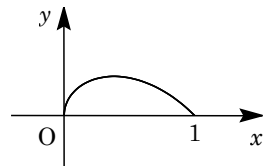
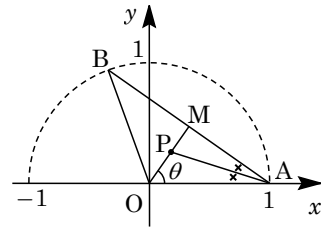
そして, 点  $P$  が描く曲線と線分  $OA$  によって

囲まれた部分  $D$  を  $x$  軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を  $V$  とすると,

$$V = \pi \int_0^1 y^2 dx = \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}{(1 + \sin \theta)^2} (-\cos \theta) d\theta$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \theta (1 - \sin^2 \theta)}{(1 + \sin \theta)^2} \cos \theta d\theta = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \theta (1 - \sin \theta)}{1 + \sin \theta} \cos \theta d\theta$$

ここで,  $1 + \sin \theta = t$  とおくと,  $\cos \theta d\theta = dt$  となるので,



$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_1^2 \frac{(t-1)^2(2-t)}{t} dt = \pi \int_1^2 \frac{-t^3 + 4t^2 - 5t + 2}{t} dt \\
 &= \pi \int_1^2 \left(-t^2 + 4t - 5 + \frac{2}{t}\right) dt = \pi \left[-\frac{t^3}{3} + 2t^2 - 5t + 2\log t\right]_1^2 \\
 &= \left(-\frac{7}{3} + 6 - 5 + 2\log 2\right)\pi = \left(-\frac{4}{3} + 2\log 2\right)\pi
 \end{aligned}$$

### [解説]

パラメータ曲線と回転体の体積についての融合問題で、量的には多めです。なお、(1)では $\triangle OAB$ の2つの内角の二等分線の交点として $P$ を数式処理しましたが、他の方法としては、内心のベクトル表示を利用することも考えられます。





4

問題のページへ

(1)  $2n\pi \leq x \leq (2n+1)\pi$  ( $n$  は自然数) のとき,  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  に対して,

$$f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

ここで,  $g(x) = x \cos x - \sin x$  とおくと,  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$  となり,

$$g'(x) = \cos x - x \sin x - \cos x = -x \sin x \leq 0$$

すると,  $g(x)$  は単調に減少し,

$$g(2n\pi) = 2n\pi > 0, \quad g((2n+1)\pi) = -(2n+1)\pi < 0$$

これより,  $2n\pi < x < (2n+1)\pi$  に  $g(x) = 0$  となる  $x$  がただ 1 つ存在し, これを  $x = \alpha_n$  とおく。

すると,  $g(x)$  と  $f'(x)$  の符号変化は一致することより,  $f(x)$  の増減は右表のようになり,  $f(x)$  が最大となる  $x$  の値は  $x = \alpha_n$  だけである。

$x$	$2n\pi$	...	$\alpha_n$	...	$(2n+1)\pi$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗		↘	0

(2) 条件より  $x_n = \alpha_n$  となり,  $g(x_n) = 0$  から,

$$x_n \cos x_n - \sin x_n = 0, \quad x_n \cos x_n = \sin x_n$$

ここで,  $\cos x_n = 0$  とすると成立しないので,  $\cos x_n \neq 0$  から  $x_n = \frac{\sin x_n}{\cos x_n} = \tan x_n$

すると,  $\frac{n}{\tan x_n} = \frac{n}{x_n}$  となり,  $\frac{n}{(2n+1)\pi} < \frac{n}{x_n} < \frac{n}{2n\pi}$  から,

$$\frac{1}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)\pi} < \frac{n}{x_n} < \frac{1}{2\pi}$$

よって,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\tan x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x_n} = \frac{1}{2\pi}$  となる。

### [解 説]

微分と増減および極限についての基本的な問題です。なお, (1)については, 原点と点  $(x, \sin x)$  を結ぶ直線の傾きとして  $f(x)$  をとらえれば, 結論は図形的に明らかです。

5

問題のページへ

(1) 自然数  $p \geq 2$  で,  $x_1 = \frac{1}{2^p + 1}$ ,  $x_{n+1} = |2x_n - 1|$  と定義

される数列  $\{x_n\}$  に対し,  $p = 3$  のとき  $x_1 = \frac{1}{2^3 + 1} = \frac{1}{9}$

$$x_2 = |2x_1 - 1| = \left| \frac{2}{9} - 1 \right| = \frac{7}{9}$$

$$x_3 = |2x_2 - 1| = \left| \frac{14}{9} - 1 \right| = \frac{5}{9}$$

$$x_4 = |2x_3 - 1| = \left| \frac{10}{9} - 1 \right| = \frac{1}{9}$$

すると,  $x_4 = x_1$  より, 数列  $\{x_n\}$  は  $\frac{1}{9}, \frac{7}{9}, \frac{5}{9}$  を周期 3

で繰り返す周期数列となり,  $k$  を 0 以上の整数として,

$$x_n = \frac{1}{9} \ (n = 3k + 1), \quad x_n = \frac{7}{9} \ (n = 3k + 2), \quad x_n = \frac{5}{9} \ (n = 3k + 3)$$

(2) (1)と同様にして,  $p = 2$  のときは,  $x_1 = \frac{1}{5}$ ,  $x_2 = \frac{3}{5}$ ,  $x_3 = \frac{1}{5} = x_1$

$$p = 4 \text{ のときは, } x_1 = \frac{1}{17}, \quad x_2 = \frac{15}{17}, \quad x_3 = \frac{13}{17}, \quad x_4 = \frac{9}{17}, \quad x_5 = \frac{1}{17} = x_1$$

さて,  $0 < \frac{1}{2^p + 1} \leq \frac{1}{2^2 + 1} = \frac{1}{5}$  から,  $0 < x_1 \leq \frac{1}{5}$  であり,

$$x_2 = \left| \frac{2}{2^p + 1} - 1 \right| = \left| \frac{-2^p + 1}{2^p + 1} \right| = \frac{2^p - 1}{2^p + 1}$$

すると,  $2 \leq n \leq p + 1$  で,  $x_n = \frac{2^p - (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-2})}{2^p + 1} = \frac{2^p - 2^{n-1} + 1}{2^p + 1}$  と推

測できるので, 以下, この式の成立を数学的帰納法で証明する。

(i)  $n = 2$  のとき  $x_2 = \frac{2^p - 2^1 + 1}{2^p + 1} = \frac{2^p - 1}{2^p + 1}$  となり, 成立している。

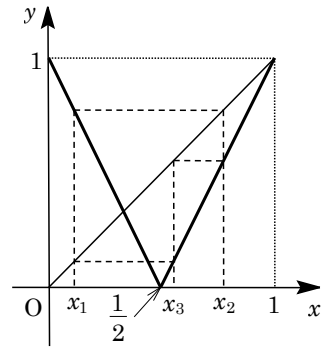
(ii)  $n = k$  ( $2 \leq k \leq p$ ) のとき  $x_k = \frac{2^p - 2^{k-1} + 1}{2^p + 1}$  と仮定する。

$$x_{k+1} = |2x_k - 1| = \left| \frac{2^{p+1} - 2^k + 2}{2^p + 1} - 1 \right| = \left| \frac{2^p - 2^k + 1}{2^p + 1} \right| = \frac{2^p - 2^k + 1}{2^p + 1}$$

これより,  $n = k + 1$  のときも成立している。

(i)(ii)より,  $x_n = \frac{2^p - 2^{n-1} + 1}{2^p + 1}$  ( $2 \leq n \leq p + 1$ ) となり, これから,

$$x_{p+1} = \frac{2^p - 2^{p+1-1} + 1}{2^p + 1} = \frac{1}{2^p + 1} = x_1$$



**[解説]**

漸化式と数学的帰納法についての問題です。(2)については, 図による予測と具体例の計算をもとに, 結論を推測して進めています。