$\boxed{1}$

解答解説のページへ

関数 $f(x)$ を，$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2} & (x \leqq 1) \\ 2x-1 & (x>1) \end{cases}$ で定める。a を実数とし，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=a,\ a_{n+1}=f(a_n)\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。以下の問いに答えよ。

(1)　すべての実数 x について $f(x) \geqq x$ が成り立つことを示せ。

(2)　$a \leqq 1$ のとき，すべての正の整数 n について $a_n \leqq 1$ が成り立つことを示せ。

(3)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を n と a を用いて表せ。

2

解答解説のページへ

$a,\ b$ を実数とする。整式 $f(x)$ を $f(x)=x^2+ax+b$ で定める。以下の問いに答えよ。ただし，2 次方程式の重解は 2 つと数える。

(1)　2 次方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの正の解をもつための a と b がみたすべき必要十分条件を求めよ。

(2)　2 次方程式 $f(x)=0$ の 2 つの解の実部がともに 0 より小さくなるような点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を ab 平面上に図示せよ。

(3)　2 次方程式 $f(x)=0$ の 2 つの解の実部がともに -1 より大きく，0 より小さくなるような点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を ab 平面上に図示せよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

n を 2 以上の整数とする。袋の中には 1 から $2n$ までの整数が 1 つずつ書いてある $2n$ 枚のカードが入っている。以下の問いに答えよ。

(1)　この袋から同時に 2 枚のカードを取り出したとき，そのカードに書かれている数の和が偶数である確率を求めよ。

(2)　この袋から同時に 3 枚のカードを取り出したとき，そのカードに書かれている数の和が偶数である確率を求めよ。

(3)　この袋から同時に 2 枚のカードを取り出したとき，そのカードに書かれている数の和が $2n+1$ 以上である確率を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

四面体 OABC があり，辺 OA, OB, OC の長さはそれぞれ $\sqrt{13}$，5，5 である。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=1$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-11$ とする。頂点 O から△ABC を含む平面に下ろした垂線とその平面との交点を H とする。以下の問いに答えよ。

(1)　線分 AB の長さを求めよ。

(2)　実数 s，t を $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ をみたすように定めるとき，s と t の値を求めよ。

(3)　四面体 OABC の体積を求めよ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

媒介変数表示 $x=\sin t$， $y=\cos\left(t-\dfrac{\pi}{6}\right)\sin t\ (0 \leqq t \leqq \pi)$ で表される曲線を C とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{dx}{dt}=0$ または $\dfrac{dy}{dt}=0$ となる t の値を求めよ。

(2) C の概形を xy 平面上に描け。

(3) C の $y \leqq 0$ の部分と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

1

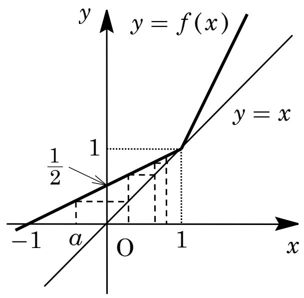
問題のページへ

(1)　$x \leqq 1$のとき，$f(x)-x=\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}\right)-x=-\dfrac{1}{2}(x-1) \geqq 0$

$x>1$のとき，$f(x)-x=(2x-1)-x=x-1>0$

したがって，すべての実数xについて，$f(x) \geqq x$が成り立つ。

(2)　$a \leqq 1$のとき$a_n \leqq 1$であることを数学的帰納法で示す。



(i)　$n=1$のとき　$a_1=a \leqq 1$で成立する。

(ii)　$n=k$のとき　$a_k \leqq 1$と仮定すると，

$$a_{k+1}-1=f(a_k)-1=\frac{1}{2}a_k+\frac{1}{2}-1$$
$$=\frac{1}{2}(a_k-1) \leqq 0$$

$a_{k+1} \leqq 1$となり，$n=k+1$のときも成立する。

(i)(ii)より，$a \leqq 1$のとき$a_n \leqq 1$である。

(3)　(Ⅰ)　$a \leqq 1$のとき　(2)から$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}$となり，$a_{n+1}-1=\dfrac{1}{2}(a_n-1)$より，

$$a_n-1=(a_1-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=(a-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって，$a_n=(a-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+1$である。

(Ⅱ)　$a>1$のとき　まず$a_n>1$であることを数学的帰納法で示す。

(i)　$n=1$のとき　$a_1=a>1$で成立する。

(ii)　$n=k$のとき　$a_k>1$と仮定すると，

$$a_{k+1}-1=f(a_k)-1=2a_k-1-1=2(a_k-1)>0$$

$a_{k+1}>1$となり，$n=k+1$のときも成立する。

(i)(ii)より，$a>1$のとき$a_n>1$である。

すると，$a_{n+1}=2a_n-1$となり，$a_{n+1}-1=2(a_n-1)$より，

$$a_n-1=(a_1-1)\cdot 2^{n-1}=(a-1)\cdot 2^{n-1}$$

よって，$a_n=(a-1)\cdot 2^{n-1}+1$である。

［解 説］

漸化式を解く問題です。(1)を誘導とみなして描いた(2)の解答例の図を参照すれば，クリアーに方針を立てることができます。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　$f(x)=x^2+ax+b=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+b$ に対し，$f(x)=0$ が異なる 2 つの正の解をもつ条件は，$y=f(x)$ のグラフの頂点が $\left(-\dfrac{a}{2},\ -\dfrac{a^2}{4}+b\right)$ であることに注意して，

$$-\frac{a}{2}>0,\quad -\frac{a^2}{4}+b<0,\quad f(0)=b>0$$

まとめると，$a<0$ かつ $0<b<\dfrac{a^2}{4}$ である。

(2)　$f(x)=0$ の 2 つの解の実部がともに 0 より小さくなる条件は,

(i)　異なる実数解をもつ $\left(b<\dfrac{a^2}{4}\right)$ とき　$-\dfrac{a}{2}<0$，$f(0)=b>0$ より,

$$a>0 \text{ かつ } 0<b<\frac{a^2}{4}$$

(ii)　重解をもつ $\left(b=\dfrac{a^2}{4}\right)$ とき　$-\dfrac{a}{2}<0$ より，$a>0$ かつ $b=\dfrac{a^2}{4}$ である。

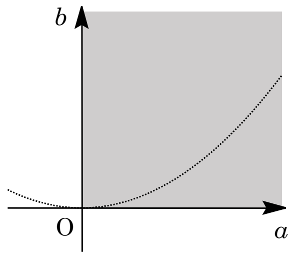
(iii) 虚数解をもつ $\left(b>\dfrac{a^2}{4}\right)$ とき

解の実部は $-\dfrac{a}{2}$ から $-\dfrac{a}{2}<0$ となり,

$$a>0 \text{ かつ } b>\frac{a^2}{4}$$

(i)～(iii)より，点 $(a,\ b)$ は右図の網点部に存在する。

ただし，境界は含まない。



(3)　$f(x)=0$ の 2 つの解の実部がともに -1 より大きく，0 より小さくなる条件は,

(i)　異なる実数解をもつ $\left(b<\dfrac{a^2}{4}\right)$ とき

$$-1<-\frac{a}{2}<0,\quad f(-1)=1-a+b>0,\quad f(0)=b>0$$

まとめると，$0<a<2$ かつ $0<b<\dfrac{a^2}{4}$ かつ $b>a-1$ である。

(ii)　重解をもつ $\left(b=\dfrac{a^2}{4}\right)$ とき　$-1<-\dfrac{a}{2}<0$ より，$0<a<2$ かつ $b=\dfrac{a^2}{4}$ である。

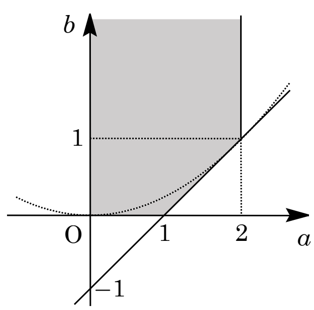
(iii) 虚数解をもつ $\left(b>\dfrac{a^2}{4}\right)$ とき

解の実部は $-\dfrac{a}{2}$ から $-1<-\dfrac{a}{2}<0$ となり,

$$0<a<2 \text{ かつ } b>\frac{a^2}{4}$$

(i)～(iii)より，点 $(a,\ b)$ は右図の網点部に存在する。

ただし，境界は含まない。



［解 説］

2 次方程式の解の配置の問題です。(2)と(3)では，問題文の「解の実部」という表現により，場合分けをしています。

3

問題のページへ

(1)　1から $2n$ までの整数が書いてある $2n$ 枚のカードが入っている袋がある。

袋から同時に2枚のカードを取り出したとき，その数の和が偶数である確率は，

(i)　2枚とも偶数のとき　$\dfrac{{}_n\mathrm{C}_2}{{}_{2n}\mathrm{C}_2}=\dfrac{n(n-1)}{2}\cdot\dfrac{2}{2n(2n-1)}=\dfrac{n-1}{2(2n-1)}$

(ii)　2枚とも奇数のとき　$\dfrac{{}_n\mathrm{C}_2}{{}_{2n}\mathrm{C}_2}=\dfrac{n(n-1)}{2}\cdot\dfrac{2}{2n(2n-1)}=\dfrac{n-1}{2(2n-1)}$

(i)(ii)より，求める確率は，$\dfrac{n-1}{2(2n-1)}+\dfrac{n-1}{2(2n-1)}=\dfrac{n-1}{2n-1}$ である。

(2)　$n\geqq 3$ において，袋から同時に 3 枚のカードを取り出したとき，その数の和が偶数である確率は，

(i)　3枚とも偶数のとき

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_3}{{}_{2n}\mathrm{C}_3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\cdot\frac{6}{2n(2n-1)(2n-2)}=\frac{n-2}{4(2n-1)}$$

(ii)　1枚が偶数で2枚が奇数のとき

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_1\times{}_n\mathrm{C}_2}{{}_{2n}\mathrm{C}_3}=\frac{n^2(n-1)}{2}\cdot\frac{6}{2n(2n-1)(2n-2)}=\frac{3n}{4(2n-1)}$$

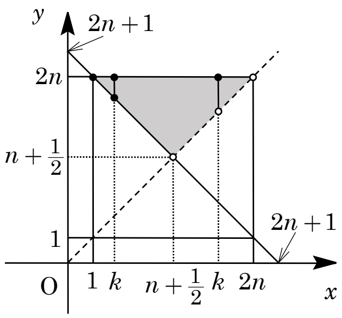
(i)(ii)より，求める確率は，$\dfrac{n-2}{4(2n-1)}+\dfrac{3n}{4(2n-1)}=\dfrac{4n-2}{4(2n-1)}=\dfrac{1}{2}$ である。

なお，$n=2$ のとき和が偶数である確率は $\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_3}=\dfrac{1}{2}$ であり，成り立っている。

(3)　袋から同時に2枚のカードを取り出したとき，その数を x, y とおくと，その和が $2n+1$ 以上であるのは，

$$x+y\geqq 2n+1\quad(1\leqq x<y\leqq 2n)$$

この領域を図示すると右図の網点部となる。ただし，実線の境界は含み，破線の境界は含まない。



ここで，網点部内の格子点の個数 N を数えると，

・$1\leqq k\leqq n$ のとき，$x=k$ 上の格子点の個数 N_k は，

$$N_k=2n-(2n+1-k)+1=k$$

・$n+1\leqq k\leqq 2n$ のとき，$x=k$ 上の格子点の個数 N_k は，$N_k=2n-k$

すると，$N=\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}N_k=\sum_{k=1}^{n}N_k+\sum_{k=n+1}^{2n}N_k$ なので，

$$N=\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=n+1}^{2n}(2n-k)=\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=0}^{n-1}k=\frac{1}{2}n(n+1)+\frac{1}{2}(n-1)n=n^2$$

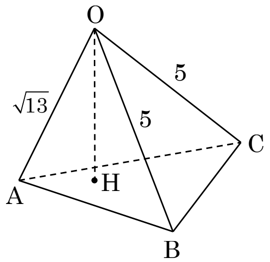
以上より，求める確率は，$\dfrac{N}{{}_{2n}\mathrm{C}_2}=n^2\cdot\dfrac{2}{2n(2n-1)}=\dfrac{n}{2n-1}$ である。

［解 説］

確率の標準的な問題です。(1)と(2)は基本タイプです。(3)では条件を不等式で表された領域内の格子点を対応させて，場合の数を視覚的に数えています。ただ，$x=k$ 上よりは $y=k$ 上で数えた方がよかったような……。

$\boxed{4}$

問題のページへ



(1)　$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\sqrt{13}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=5$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=1$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-11$ である四面体 OABC に対して，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$$
$$=5^2-2\cdot1+13=36$$

よって，$\mathrm{AB}=\sqrt{36}=6$ となる。

(2)　頂点 O から△ABC を含む平面に垂線 OH を下ろし，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})+t(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$$
$$=(1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

まず，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ より，$\{(1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}\}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=0$ となり，

$$(1-s-t)+25s-11t-13(1-s-t)-s-t=0$$

これより，$36s-12=0$ となるので，$s=\dfrac{1}{3}$ である。

また，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ より，$\{(1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}\}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=0$ となり，

$$(1-s-t)-11s+25t-13(1-s-t)-s-t=0$$

これより，$36t-12=0$ となるので，$t=\dfrac{1}{3}$ である。

(3)　まず，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=-11-1-1+13=0$

また，(1)と同様にすると $\mathrm{AC}=\sqrt{36}=6$ となるので，$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot6^2=18$

ここで，(2)より，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})$ となり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=13+25+25+2-22+2=45$$

すると，$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\dfrac{1}{3}\cdot\sqrt{45}=\sqrt{5}$ となり，四面体 OABC の体積 V は，

$$V=\frac{1}{3}\cdot(\triangle\mathrm{ABC})\cdot|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\frac{1}{3}\cdot18\cdot\sqrt{5}=6\sqrt{5}$$

［解　説］

空間ベクトルの四面体への応用問題です。計算が煩雑にならないように，数値の調整を行ったことが感じられます。

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1)　曲線$C: x=\sin t$，$y=\cos\left(t-\dfrac{\pi}{6}\right)\sin t$ $(0 \leqq t \leqq \pi)$に対して，$\dfrac{dx}{dt}=\cos t$

$$\frac{dy}{dt}=-\sin\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\sin t+\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\cos t=\cos\left(t-\frac{\pi}{6}+t\right)=\cos\left(2t-\frac{\pi}{6}\right)$$

すると，$\dfrac{dx}{dt}=0$ となるのは$t=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{dy}{dt}=0$ となるのは$-\dfrac{\pi}{6} \leqq 2t-\dfrac{\pi}{6} \leqq \dfrac{11}{6}\pi$ から，

$$2t-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi,\quad t=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{6}\pi$$

よって，$\dfrac{dx}{dt}=0$ または$\dfrac{dy}{dt}=0$ となるのは，$t=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi$ である。

(2)　$0 \leqq t \leqq \pi$ における x, y の増減を調べると，次の表のようになる。

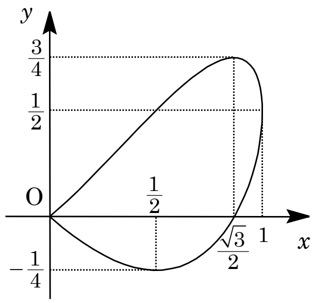
t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{dt}$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
x	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{3}{4}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0

また，曲線 C と x 軸との交点は，$y=0$ から，

$$t=0,\ \frac{2}{3}\pi,\ \pi$$

すると，その座標は，$(0,\ 0)$，$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$ となり，これより C の概形は右下図のようになる。

(3)　C の $y \leqq 0$ の部分と x 軸で囲まれた図形の面積 S は，



$$S=-\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} y\,dx=-\int_{\pi}^{\frac{2}{3}\pi}\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\sin t\cdot\cos t\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\sin 2t\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)dt$$

$$=\frac{1}{4}\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\left\{\sin\left(3t-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(t+\frac{\pi}{6}\right)\right\}dt$$

$$=-\frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}\cos\left(3t-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(t+\frac{\pi}{6}\right)\right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}$$

$$=-\frac{1}{12}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{1}{4}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{12}$$

［解　説］

パラメータ曲線と面積についての問題です。ややこしい計算はありません。