1

解答解説のページへ

c を正の実数とする。各項が正である数列$\{a_n\}$を次のように定める。a_1 は関数 $y=x+\sqrt{c-x^2}$ $(0 \leqq x \leqq \sqrt{c})$ が最大値をとるときの x の値とする。a_{n+1} は関数 $y=x+\sqrt{a_n-x^2}$ $(0 \leqq x \leqq \sqrt{a_n})$ が最大値をとるときの x の値とする。数列$\{b_n\}$を $b_n=\log_2 a_n$ で定める。以下の問いに答えよ。

(1)　a_1 を c を用いて表せ。

(2)　b_{n+1} を b_n を用いて表せ。

(3)　数列$\{b_n\}$の一般項を n と c を用いて表せ。

2

解答解説のページへ

a, b, c は実数で，$a \neq 0$ とする。放物線 C と直線 l_1，l_2 をそれぞれ

$$C : y = ax^2 + bx + c,\ \ l_1 : y = -3x + 3,\ \ l_2 : y = x + 3$$

で定める。l_1，l_2 がともに C に接するとき，以下の問いに答えよ。

(1) b を求めよ。また c を a を用いて表せ。

(2) C が x 軸と異なる 2 点で交わるとき，$\dfrac{1}{a}$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) C と l_1 の接点を P，C と l_2 の接点を Q，放物線 C の頂点を R とする。a が(2)の条件を満たしながら動くとき，△PQR の重心 G の軌跡を求めよ。

3

解答解説のページへ

n を自然数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　1 個のサイコロを投げて出た目が必ず n の約数となるような n を小さい順に 3 つ求めよ。

(2)　1 個のサイコロを投げて出た目が n の約数となる確率が $\dfrac{5}{6}$ であるような n を小さい順に 3 つ求めよ。

(3)　1 個のサイコロを 3 回投げて出た目の積が 160 の約数となる確率を求めよ。

4　　解答解説のページへ

1 辺の長さが $\sqrt{2}$ の正方形 ABCD を底面にもち，高さが 1 である直方体 ABCD-EFGH を，頂点の座標がそれぞれ A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 1,\ 0)$，C$(-1,\ 0,\ 0)$，D$(0,\ -1,\ 0)$，E$(1,\ 0,\ 1)$，F$(0,\ 1,\ 1)$，G$(-1,\ 0,\ 1)$，H$(0,\ -1,\ 1)$ になるように xyz 空間内におく。以下の問いに答えよ。

(1)　直方体 ABCD-EFGH を直線 AE のまわりに 1 回転してできる回転体を X_1 とし，また直線 AB のまわりに 1 回転してできる回転体を X_2 とする。X_1 の体積 V_1 と X_2 の体積 V_2 を求めよ。

(2)　$0 \leqq t \leqq 1$ とする。平面 $x=t$ と線分 EF の共有点の座標を求めよ。

(3)　直方体 ABCD-EFGH を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を X_3 とする。X_3 の体積 V_3 を求めよ。

5

解答解説のページへ

0 以上の実数 x に対して，$f(x)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-x}^{x}\dfrac{1}{1+u^2}du$ と定める。以下の問いに答えよ。

(1)　$0\leqq\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数 α に対して，$f(\tan\alpha)$ を求めよ。

(2)　xy 平面上で，次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

$$0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1,\ f(x)+f(y)\leqq f(1)$$

またその領域の面積を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$y=x+\sqrt{c-x^2}$ $(0\leqq x\leqq\sqrt{c})$ に対し，

$$y'=1+\frac{-2x}{2\sqrt{c-x^2}}=\frac{\sqrt{c-x^2}-x}{\sqrt{c-x^2}}$$
$$=-\frac{2x^2-c}{\sqrt{c-x^2}\left(\sqrt{c-x^2}+x\right)}$$

x	0	$\cdots$	$\sqrt{\frac{c}{2}}$	$\cdots$	$\sqrt{c}$
y'		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$		$\searrow$	

これより，$0\leqq x\leqq\sqrt{c}$ における y の値は，増減が上表のようになり，$x=\sqrt{\frac{c}{2}}$ で最大値をとるので，$a_1=\sqrt{\frac{c}{2}}$ である。

(2)　$y=x+\sqrt{a_n-x^2}$ $(0\leqq x\leqq\sqrt{a_n})$ に対し，

$$y'=-\frac{2x^2-a_n}{\sqrt{a_n-x^2}\left(\sqrt{a_n-x^2}+x\right)}$$

x	0	$\cdots$	$\sqrt{\frac{a_n}{2}}$	$\cdots$	$\sqrt{a_n}$
y'		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$		$\searrow$	

これより，$0\leqq x\leqq\sqrt{a_n}$ における y の値は，増減が右表のようになり，$x=\sqrt{\frac{a_n}{2}}$ で最大値をとるので，$a_{n+1}=\sqrt{\frac{a_n}{2}}$ であり，

$$\log_2 a_{n+1}=\log_2\sqrt{\frac{a_n}{2}}=\frac{1}{2}(\log_2 a_n-\log_2 2)=\frac{1}{2}(\log_2 a_n-1)$$

すると，$b_n=\log_2 a_n$ から，$b_{n+1}=\frac{1}{2}(b_n-1)$ ………(＊)

(3)　(1)から，$b_1=\log_2 a_1=\log_2\sqrt{\frac{c}{2}}=\frac{1}{2}(\log_2 c-1)$

また，(＊)から，$b_{n+1}+1=\frac{1}{2}(b_n+1)$ となり，

$$b_n+1=(b_1+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left\{\frac{1}{2}(\log_2 c-1)+1\right\}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=(\log_2 c+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

よって，$b_n=(\log_2 c+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n-1$ である。

［解　説］

微分法の絡んだ漸化式の基本的な問題です。

2　　問題のページへ

(1)　$C: y=ax^2+bx+c$ ……①，$l_1: y=-3x+3$ ……②，$l_2: y=x+3$ ……③に対し，

$a\neq 0$ において①②を連立すると，$ax^2+bx+c=-3x+3$ となり，

$$ax^2+(b+3)x+c-3=0 \cdots\cdots\cdots ④$$

C と l_1 が接することより，$D=(b+3)^2-4a(c-3)=0$ ………⑤

$a\neq 0$ において①③を連立すると，$ax^2+bx+c=x+3$ となり，

$$ax^2+(b-1)x+c-3=0 \cdots\cdots\cdots ⑥$$

C と l_2 が接することより，$D=(b-1)^2-4a(c-3)=0$ ………⑦

⑤⑦より，$(b+3)^2-(b-1)^2=0$ となり，$4(2b+2)=0$ から $b=-1$

⑤に代入して $4-4a(c-3)=0$ となり，$a(c-3)=1$ から $c=\dfrac{1}{a}+3$

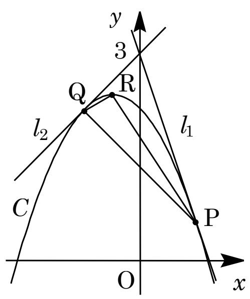
(2)　(1)から，$C: y=ax^2-x+\dfrac{1}{a}+3$ となり，C が x 軸と異なる 2 点で交わるとき，

$ax^2-x+\dfrac{1}{a}+3=0$ は異なる 2 実数解をもつので，$D=1-4a\left(\dfrac{1}{a}+3\right)>0$ から，

$$-3-12a>0,\ a<-\frac{1}{4}$$

よって，$-4<\dfrac{1}{a}<0$ である。

(3)　$C: y=a\left(x-\dfrac{1}{2a}\right)^2+\dfrac{3}{4a}+3$ より，$\mathrm{R}\left(\dfrac{1}{2a},\ \dfrac{3}{4a}+3\right)$



接点 P の x 座標は④の重解より，$x=-\dfrac{b+3}{2a}=-\dfrac{1}{a}$ となり，

②から $y=-3\left(-\dfrac{1}{a}\right)+3=\dfrac{3}{a}+3$ なので，$\mathrm{P}\left(-\dfrac{1}{a},\ \dfrac{3}{a}+3\right)$

接点 Q の x 座標は⑥の重解より，$x=-\dfrac{b-1}{2a}=\dfrac{1}{a}$ となり，

③から $y=\dfrac{1}{a}+3$ なので，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{a},\ \dfrac{1}{a}+3\right)$

したがって，$\triangle\mathrm{PQR}$ の重心 $\mathrm{G}(x,\ y)$ に対して，

$$x=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{2a}\right)=\frac{1}{6a},\quad y=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{a}+3+\frac{1}{a}+3+\frac{3}{4a}+3\right)=\frac{19}{12a}+3$$

すると，$-4<\dfrac{1}{a}<0$ から $-\dfrac{2}{3}<x<0$ となり，また $y=\dfrac{19}{2}\cdot\dfrac{1}{6a}+3=\dfrac{19}{2}x+3$ なので，G の軌跡は線分 $y=\dfrac{19}{2}x+3\ \left(-\dfrac{2}{3}<x<0\right)$ である。

［解　説］

放物線と直線を題材にした軌跡の基本題です。

3

問題のページへ

(1) サイコロを投げて出た目が必ず n の約数となるのは, n が 1, 2, 3, 4, 5, 6 の公倍数, すなわち最小公倍数 $2^2\times3\times5=60$ の倍数のときである。

すると, n を小さい順に 3 つ記すと, 60, 120, 180 である。

(2) サイコロを投げて出た目が n の約数となる場合について,

(i) 2, 3, 4, 5, 6 の公倍数のとき　n は最小公倍数 60 の倍数

(ii) 1, 3, 4, 5, 6 の公倍数のとき　n は最小公倍数 60 の倍数

(iii) 1, 2, 4, 5, 6 の公倍数のとき　n は最小公倍数 60 の倍数

(iv) 1, 2, 3, 5, 6 の公倍数のとき　n は最小公倍数 30 の倍数

(v) 1, 2, 3, 4, 6 の公倍数のとき　n は最小公倍数 12 の倍数

(vi) 1, 2, 3, 4, 5 の公倍数のとき　n は最小公倍数 60 の倍数

すると, (i)(ii)(iii)(vi)のとき, (1)から出た目が 60 の約数となる確率は 1 である。(iv)のとき出た目が 30 の約数となる確率は $\dfrac{5}{6}$ である。(v)のとき出た目が 12 の約数, 24 の約数となる確率はいずれも $\dfrac{5}{6}$ である。

すると, 出た目が n の約数となる確率が $\dfrac{5}{6}$ となる n を, 小さい順に 3 つ記すと, 12, 24, 30 である。

(3) サイコロを 3 回投げて出た目の積が $160=2^5\times5$ の約数となるのは,

(a) 積が 5 の倍数でないとき

・3 回とも同じ目：$1\times1\times1$，$2\times2\times2$

・2 回だけ同じ目：$1\times1\times2$，$1\times1\times4$，$1\times2\times2$，$2\times2\times4$，$1\times4\times4$，$2\times4\times4$

・3 回とも異なる目：$1\times2\times4$

このとき確率は, $2\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)^3+6\cdot\dfrac{3!}{2!}\left(\dfrac{1}{6}\right)^3+3!\left(\dfrac{1}{6}\right)^3=\dfrac{2}{6^3}+\dfrac{18}{6^3}+\dfrac{6}{6^3}=\dfrac{26}{6^3}$ となる。

(b) 積が 5 の倍数のとき

・2 回だけ同じ目：$1\times1\times5$，$2\times2\times5$，$4\times4\times5$

・3 回とも異なる目：$1\times2\times5$，$1\times4\times5$，$2\times4\times5$

このとき確率は, $3\cdot\dfrac{3!}{2!}\left(\dfrac{1}{6}\right)^3+3\cdot3!\left(\dfrac{1}{6}\right)^3=\dfrac{9}{6^3}+\dfrac{18}{6^3}=\dfrac{27}{6^3}$ となる。

(a)(b)より, 求める確率は, $\dfrac{26}{6^3}+\dfrac{27}{6^3}=\dfrac{53}{216}$ である。

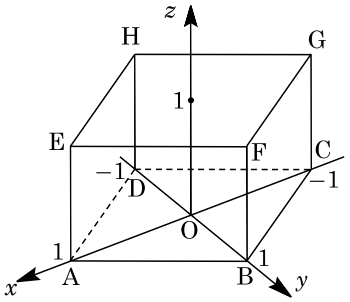
［解 説］

ミスに要注意という丁寧に数え上げるタイプの確率問題です。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　直方体ABCD-EFGHを直線AEのまわりに1回転してできる回転体X_1は，底面の半径が$\mathrm{AC}=2$，高さが$\mathrm{AE}=1$の円柱なので，その体積V_1は，



$$V_1=\pi\cdot 2^2\cdot 1=4\pi$$

また，直線ABのまわりに1回転してできる回転体X_2は，底面の半径が$\mathrm{AH}=\sqrt{2+1}=\sqrt{3}$，高さが$\mathrm{AB}=\sqrt{2}$の円柱なので，その体積$V_2$は，

$$V_2=\pi\cdot(\sqrt{3})^2\cdot\sqrt{2}=3\sqrt{2}\pi$$

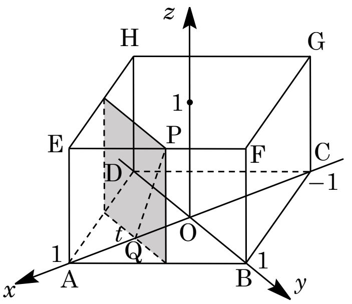
(2)　線分EFのパラメータ表示は，$0\leqq k\leqq 1$として，

$$(x,\ y,\ z)=\overrightarrow{\mathrm{OE}}+k\overrightarrow{\mathrm{EF}}=(1,\ 0,\ 1)+k(-1,\ 1,\ 0)=(1-k,\ k,\ 1)$$

線分EFと平面$x=t$の共有点をPとすると，$1-k=t$から$k=1-t$となるので，その座標は$\mathrm{P}(t,\ 1-t,\ 1)$である。

(3)　まず，x軸上の点$\mathrm{Q}(t,\ 0,\ 0)$とおく。

さて，直方体ABCD-EFGHをx軸のまわりに1回転してできる回転体X_3を，x軸に垂直な平面$x=t$で切断する。その切り口は，右図の網点をかけた長方形を点Qのまわりに1回転したものとなり，点Qを中心とする半径QPの円である。



その面積を$S(t)$とおくと，

$$S(t)=\pi\mathrm{QP}^2=\pi\{(1-t)^2+1\}=\pi(t^2-2t+2)$$

X_3はyz平面について対称なので，その体積V_3は，

$$V_3=2\int_0^1 S(t)\,dt=2\pi\int_0^1(t^2-2t+2)\,dt=2\pi\Big[\frac{t^3}{3}-t^2+2t\Big]_0^1=2\pi\cdot\frac{4}{3}=\frac{8}{3}\pi$$

［解　説］

回転体の体積の問題です。誘導つきで，しかも計算は穏やかです。

5

問題のページへ

(1)　$x \geqq 0$ のとき，$f(x)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-x}^{x}\dfrac{1}{1+u^2}du$ に対して，$g(u)=\dfrac{1}{1+u^2}$ とおくと，$g(-u)=g(u)$ であることから，

$$f(x)=\frac{1}{2}\cdot 2\int_0^x \frac{1}{1+u^2}du=\int_0^x \frac{1}{1+u^2}du$$

$0 \leqq \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$u=\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$du=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ から，

$$f(\tan\alpha)=\int_0^{\tan\alpha}\frac{1}{1+u^2}du=\int_0^{\alpha}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\alpha}d\theta=\alpha$$

(2)　まず，$f(x)+f(y)\leqq f(1)$ より，

$$\int_0^x \frac{1}{1+u^2}du+\int_0^y \frac{1}{1+u^2}du \leqq \int_0^1 \frac{1}{1+u^2}du \cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$x=\tan\alpha$，$y=\tan\beta$ とおくと，$0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 1$ から，

$$0\leqq\alpha\leqq\frac{\pi}{4},\ 0\leqq\beta\leqq\frac{\pi}{4}$$

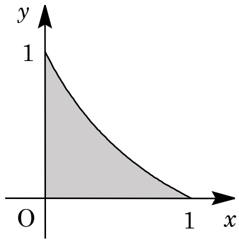
$1=\tan\dfrac{\pi}{4}$ なので，(1)と同様に $u=\tan\theta$ とおくと，(*)から $\alpha+\beta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ となり，

$$\tan(\alpha+\beta)\leqq\tan\frac{\pi}{4},\ \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\leqq 1$$

すると，$\dfrac{x+y}{1-xy}\leqq 1$ となり，$x=y=1$ では(*)が不成立なので，$0\leqq xy<1$ から，

$$x+y\leqq 1-xy,\ (x+1)y\leqq -x+1,\ y\leqq\frac{-x+1}{x+1}=-1+\frac{2}{x+1}$$

よって，領域 $0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 1$，$f(x)+f(y)\leqq f(1)$ を図示すると，右図の網点部となる。なお，境界は領域に含む。



また，この領域の面積を S とおくと，

$$S=\int_0^1\left(-1+\frac{2}{x+1}\right)dx=\Big[-x+2\log|x+1|\Big]_0^1$$
$$=2\log 2-1$$

［解 説］

置換積分を題材にした問題です。(2)では(1)の誘導をストレートに利用できます。