

1[解答例のページへ](#)

k を実数とする。 $f(x)$ と $g(x)$ を, $f(x) = |x^3 - x|$, $g(x) = k(x+1)$ とおき, 曲線 $y = f(x)$ を C , 直線 $y = g(x)$ を l とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 曲線 C の概形をかけ。ただし, 関数 $f(x)$ の極大値を調べる必要はない。
- (2) 曲線 C と直線 l がちょうど 4 つの共有点をもつような k の値を求めよ。

2

[解答例のページへ](#)

実数 a に対して、 a を超えない最大の整数を k とするとき、 $a - k$ を a の小数部分という。 n を自然数とし、 $a_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$ とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) $0 < a_n < 1$ が成り立つことを示せ。
- (2) b_n を $\left(3n - \frac{1}{a_n}\right)$ の小数部分とする。 b_n を n を用いて表せ。
- (3) b_n を (2) で定めたものとする。 m, n を異なる 2 つの自然数とすると、 $a_m + b_n \neq 1$ であることを示せ。

3[解答例のページへ](#)

媒介変数 θ を用いて、 $x = \sin \theta$ ， $y = \cos \theta + |\sin \theta|$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) で表される曲線を C とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 曲線 C の概形をかけ。
- (2) 曲線 C で囲まれた部分の面積を求めよ。

4[解答例のページへ](#)

s, t を実数とする。座標空間に 3 点 $A(-4, -1, 0)$, $B(-3, 0, -1)$, $P(s, t, -2s+t-1)$ がある。以下の問いに答えよ。

- (1) 3 点 A, B, P は一直線上にないことを示せ。
- (2) 点 P から直線 AB に下ろした垂線を PH とする。点 H の座標を s を用いて表せ。
- (3) s, t が変化するとき、三角形 ABP の面積の最小値を求めよ。

5

解答例のページへ

連続関数 $f(x)$ は $x \geq 0$ で $f(x) \geq 0$ を満たし、 $x > 0$ で微分可能であり、その導関数 $f'(x)$ は連続であるとする。 $t \geq 1$ を満たす t に対して、原点 O と点 $P(t, f(t))$ の距離を $g(t)$ とする。また、 $t > 1$ を満たす t に対して、 $y = f(x)$ ($1 \leq x \leq t$) で表される曲線の長さを $h(t)$ とし、 $t = 1$ のときは $h(1) = 0$ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $t > 1$ とする。开区間 $(1, t)$ で常に $f(x) - xf'(x) = 0$ が成り立つならば、閉区間 $[1, t]$ で $\frac{f(x)}{x}$ は定数であることを示せ。
- (2) $t \geq 1$ を満たす任意の t に対して、 $g(t) = h(t) + 2$ が成り立つとする。このとき、 $f(1)$ の値を求めよ。また、 $t \geq 1$ のとき $f(t)$ を t を用いて表せ。

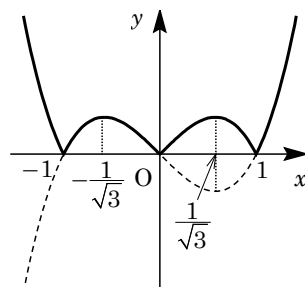
1

問題のページへ

- (1) $F(x) = x^3 - x = x(x+1)(x-1)$ とおくと、 $F'(x) = 3x^2 - 1$ となる。

これより、 $F(x)$ の増減は右表のようになり、 $F(-x) = -F(x)$ にも注意すると、右図の破線が曲線 $y = F(x)$ の概形である。

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$F'(x)$	+	0	-	0	+
$F(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$



さて、 $f(x) = |x^3 - x| = |F(x)|$ に対して、

- (i) $F(x) \geq 0$ ($-1 \leq x \leq 0$, $1 \leq x$) のとき

$$f(x) = F(x)$$

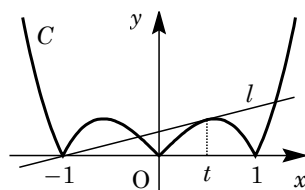
- (ii) $F(x) \leq 0$ ($x \leq -1$, $0 \leq x \leq 1$) のとき

$$f(x) = -F(x)$$

(i)(ii)より、曲線 $C: y = f(x)$ の概形は、右上図の太線のようにになる。

- (2) $g(x) = k(x+1)$ のとき、直線 $l: y = g(x)$ は傾きが k で点 $(-1, 0)$ を通る。

ここで、右図のように、 C と l が $x = t$ ($0 < t < 1$) で接するとき、 l の傾き k の値を $k = k_0$ とする。



すると、 C と l の共有点の個数は、 $k = k_0$ のとき 4 個、

$0 < k < k_0$ のとき 5 個、 $k \leq 0$, $k_0 < k$ のとき 3 個以下である。

さて、 $0 < x < 1$ において $f(x) = -F(x) = -x^3 + x$ から $f'(x) = -3x^2 + 1$ となり、 $x = t$ における接線の方程式は、

$$y - (-t^3 + t) = (-3t^2 + 1)(x - t), \quad y = (-3t^2 + 1)x + 2t^3$$

点 $(-1, 0)$ を通ることより、 $0 = -(-3t^2 + 1) + 2t^3$ となり、

$$2t^3 + 3t^2 - 1 = 0, \quad (t+1)^2(2t-1) = 0$$

$0 < t < 1$ より $t = \frac{1}{2}$ となり、このとき $k_0 = -3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{4}$ である。

以上より、 C と l が 4 つの共有点をもつ k の値は $k = \frac{1}{4}$ である。

[コメント]

微分の応用問題です。(2)は、(1)からの流れに沿って、図形的に C と l の位置関係を考えています。

2

問題のページへ

- (1)
- n
- が自然数のとき,
- $a_n = \sqrt{n^2+1} - n$
- に対して,

$$a_n = \frac{(n^2+1) - n^2}{\sqrt{n^2+1} + n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n}$$

すると, $\sqrt{n^2+1} + n \geq \sqrt{2} + 1 > 1$ より, $0 < a_n < 1$ が成り立つ。

- (2)
- $3n - \frac{1}{a_n} = 3n - (\sqrt{n^2+1} + n) = 2n - \sqrt{n^2+1}$

さて, $\sqrt{n^2} < \sqrt{n^2+1} < \sqrt{n^2+2n+1} = \sqrt{(n+1)^2}$ から, $n < \sqrt{n^2+1} < n+1$

$$2n - (n+1) < 2n - \sqrt{n^2+1} < 2n - n, \quad n-1 < 3n - \frac{1}{a_n} < n$$

これより, $3n - \frac{1}{a_n}$ を超えない最大の整数は $n-1$ となり, 小数部分 b_n は,

$$b_n = \left(3n - \frac{1}{a_n}\right) - (n-1) = (2n - \sqrt{n^2+1}) - n + 1 = n + 1 - \sqrt{n^2+1}$$

- (3) 2 つの自然数
- m, n
- に対して,
- $a_m + b_n = 1$
- とすると, (1)(2)から,

$$(\sqrt{m^2+1} - m) + (n + 1 - \sqrt{n^2+1}) = 1$$

$$\sqrt{m^2+1} - m = \sqrt{n^2+1} - n \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(1)と同様に変形すると, ①から $\frac{1}{\sqrt{m^2+1} + m} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n}$ となり,

$$\sqrt{m^2+1} + m = \sqrt{n^2+1} + n \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①②より, $2m = 2n$ から $m = n$ である。

したがって, 「 $a_m + b_n = 1$ ならば $m = n$ 」が成り立ち, 対偶を考えると「 $m \neq n$ ならば $a_m + b_n \neq 1$ 」である。

[コメント]

整数部分と小数部分についての問題です。(3)はいろいろな証明が可能ですが, 解答例では, 分子の有理化という手法と対偶を組み合わせた方法で記述しました。

3

問題のページへ

(1) 曲線 $C: x = \sin \theta, y = \cos \theta + |\sin \theta|$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) に対し, $x = f(\theta), y = g(\theta)$

とおくと, $f(2\pi - \theta) = \sin(2\pi - \theta) = -\sin \theta = -f(\theta)$

$$g(2\pi - \theta) = \cos(2\pi - \theta) + |\sin(2\pi - \theta)| = \cos \theta + |-\sin \theta| = g(\theta)$$

これより, 曲線 C の $0 \leq \theta \leq \pi$ の部分と $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ の部分は y 軸対称になるので, 以下, $0 \leq \theta \leq \pi$ において調べる

と, $x = f(\theta) = \sin \theta$ から,

$$f'(\theta) = \cos \theta$$

$y = g(\theta) = \cos \theta + \sin \theta$ から,

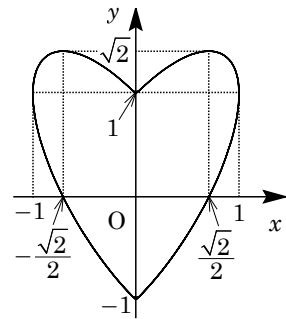
$$\begin{aligned} g'(\theta) &= -\sin \theta + \cos \theta \\ &= -\sqrt{2} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

θ	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{\pi}{2}$	...	π
$f'(\theta)$	1	+		+	0	-	-1
$f(\theta)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
$g'(\theta)$	1	+	0	-		-	-1
$g(\theta)$	1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	1	$\searrow$	-1

また, $\frac{dy}{dx} = \frac{g'(\theta)}{f'(\theta)}$ から, $\theta = 0$ のとき $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1} = 1$,

$\theta = \pi$ のとき $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{-1} = 1$ となる。

したがって, $0 \leq \theta \leq \pi$ の部分と, この部分を y 軸対称した $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ の部分を合わせて描くと, 曲線 C の概形は右図のようになる。



(2) 曲線 C の $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の部分を $y = y_1(x)$, $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ の

部分を $y = y_2(x)$ とおくと, 曲線 C で囲まれた部分の面積 S は,

$$\begin{aligned} S &= 2 \left\{ \int_0^1 y_1(x) dx - \int_0^1 y_2(x) dx \right\} \\ &= 2 \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\theta) f'(\theta) d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} g(\theta) f'(\theta) d\theta \right\} = 2 \int_0^{\pi} g(\theta) f'(\theta) d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi} (\cos \theta + \sin \theta) \cos \theta d\theta = 2 \int_0^{\pi} (\cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta) d\theta \\ &= \int_0^{\pi} (1 + \cos 2\theta + \sin 2\theta) d\theta = \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta \right]_0^{\pi} = \pi \end{aligned}$$

[コメント]

パラメータ曲線で囲まれる図形の面積を求める典型題です。パラメータを消去し, y を x の関数として表して処理することもできます。

4

問題のページへ

- (1) 3 点 $A(-4, -1, 0)$, $B(-3, 0, -1)$, $P(s, t, -2s+t-1)$ が一直線上にあるとすると, k を実数として, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{AB}$ が成り立ち,

$$(s, t, -2s+t-1) = (-4, -1, 0) + k(1, 1, -1)$$

これより, $s = -4 + k \cdots \cdots \textcircled{1}$, $t = -1 + k \cdots \cdots \textcircled{2}$, $-2s+t-1 = -k \cdots \cdots \textcircled{3}$

$\textcircled{1}\textcircled{2}$ を $\textcircled{3}$ に代入すると, $-2(-4+k)+(-1+k)-1 = -k$, すなわち $-k+6 = -k$

となり, 成立しない。

したがって, $\overrightarrow{OP} \neq \overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{AB}$ から, 3 点 A, B, P は一直線上にない。

- (2) 直線 AB 上の点 H を, $H(-4+k, -1+k, -k) \cdots \cdots \textcircled{4}$ とおくと,

$$\overrightarrow{PH} = (-4+k-s, -1+k-t, -k+2s-t+1)$$

$\overrightarrow{PH} \perp \overrightarrow{AB}$ から $\overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ となり,

$$(-4+k-s) + (-1+k-t) - (-k+2s-t+1) = 0$$

まとめると, $-6+3k-3s=0$ から $k=s+2$ となり, $\textcircled{4}$ に代入して,

$$H(s-2, s+1, -s-2)$$

- (3) $\overrightarrow{PH} = (s-2-s, s+1-t, -s-2+2s-t+1) = (-2, s-t+1, s-t-1)$ から,

$$|\overrightarrow{PH}|^2 = (-2)^2 + (s-t+1)^2 + (s-t-1)^2 = 4 + 2(s-t)^2 + 2 = 2(s-t)^2 + 6$$

これより, $|\overrightarrow{PH}|$ は $s=t$ のとき最小値 $\sqrt{6}$ をとるので, $\triangle ABP$ の面積の最小値は,

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3} \text{ から, } \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = \frac{3}{2}\sqrt{2} \text{ である。}$$

[コメント]

空間図形の基本的な問題です。誘導に従って計算を進めればよいタイプです。

5

問題のページへ

- (1) $t > 1$ のとき、开区間 $(1, t)$ で $f(x) - xf'(x) = 0$ が成り立つならば、

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = 0$$

$f(x)$ は $x \geq 0$ で連続なので、閉区間 $[1, t]$ で $\frac{f(x)}{x}$ は定数である。

- (2) 原点 O と点 $P(t, f(t))$ の距離を $g(t)$ とすると、 $g(t) = \sqrt{t^2 + \{f(t)\}^2} \dots\dots\dots ①$

$t > 1$ のとき $y = f(x)$ ($1 \leq x \leq t$) で表される曲線の長さを $h(t)$ とし、また $t = 1$ のとき $h(1) = 0$ とすると、 $t \geq 1$ において、 $h(t) = \int_1^t \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx \dots\dots\dots ②$

ここで、 $t \geq 1$ において $g(t) = h(t) + 2$ より、①②から、

$$\sqrt{t^2 + \{f(t)\}^2} = \int_1^t \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx + 2 \dots\dots\dots ③$$

③に $t = 1$ を代入すると、 $\sqrt{1 + \{f(1)\}^2} = 2$ から $1 + \{f(1)\}^2 = 4$ となり、 $f(x) \geq 0$ より $f(1) = \sqrt{3}$ である。

また、③の両辺を t で微分すると、 $\frac{2t + 2f(t)f'(t)}{2\sqrt{t^2 + \{f(t)\}^2}} = \sqrt{1 + \{f'(t)\}^2}$ から、

$$t + f(t)f'(t) = \sqrt{1 + \{f'(t)\}^2} \sqrt{t^2 + \{f(t)\}^2}$$

両辺 2 乗して、 $\{t + f(t)f'(t)\}^2 = [1 + \{f'(t)\}^2][t^2 + \{f(t)\}^2]$ から、

$$2tf(t)f'(t) = \{f(t)\}^2 + t^2\{f'(t)\}^2, \quad \{tf'(t) - f(t)\}^2 = 0$$

すると、 $tf'(t) - f(t) = 0$ から、(1)の結果を用いると、 k を定数として、

$$\frac{f(t)}{t} = k, \quad f(t) = kt$$

そして、 $f(1) = \sqrt{3}$ から $k = \sqrt{3}$ となり、 $f(t) = \sqrt{3}t$ である。

[コメント]

誘導の丁寧な関数方程式を解く問題です。(2)の最後で、(1)との関連が見えてきます。