$\boxed{1}$ 解答解説のページへ

次の各問いに答えよ。

(1) z が虚数で $z+\dfrac{1}{z}$ が実数のとき $|z|$ の値 a を求めよ。

(2) (1)で求めた a に対して, z が条件 $|z|=a$ をみたしながら動くとき, $w=(z+\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^4$ の絶対値と偏角の動く範囲を求めよ。

2

解答解説のページへ

$a>0$ とする。関数 $f(x)=|x^3-3a^2x|$ の $-1\leqq x\leqq 1$ における最大値を $M(a)$ とするとき，次の各問いに答えよ。

(1)　$M(a)$ を a を用いて表せ。

(2)　$M(a)$ を最小にする a の値を求めよ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

座標空間内の 8 点 O$(0,\ 0,\ 0)$, A$(2,\ 0,\ 0)$, B$(2,\ 2,\ 0)$, C$(0,\ 2,\ 0)$, P$(0,\ 0,\ 1)$, Q$(2,\ 0,\ 1)$, R$(2,\ 2,\ 1)$, S$(0,\ 2,\ 1)$ を頂点とする直方体を考える。次の各問いに答えよ。

(1)　D $=(x,\ y,\ 1)$ を面 PQRS 上の点とするときベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を x, y およびベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を用いて表せ。

(2)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ がベクトル $\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$ と直交するための条件を x, y を用いて表せ。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OD}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CQ}}$ である D の中で $|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|$ が最小となるような D を与える x, y の値を求めよ。

$\boxed{1}$

問題のページへ

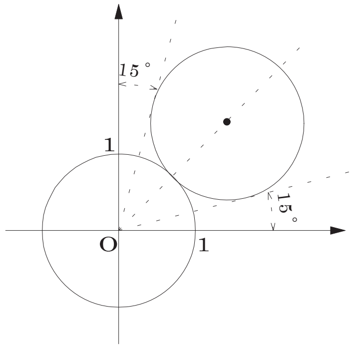
(1)　$z+\dfrac{1}{z}$ が実数より，$z+\dfrac{1}{z}=\overline{z}+\dfrac{1}{\overline{z}}$

$$z-\overline{z}+\frac{\overline{z}-z}{z\overline{z}}=0,\ |z|^2(z-\overline{z})-(z-\overline{z})=0$$

$$(|z|^2-1)(z-\overline{z})=0$$

z が虚数より $z\neq\overline{z}$ なので $|z|=1$，すなわち $a=1$

(2)　(1)より $|z|=1$ のとき，$u=z+\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ とおくと，点 u は点 $\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ を中心とし，半径 1 の円周上を動く。



$1\leqq|u|\leqq 3$ より，$|w|=|u^4|=|u|^4$ なので，$1\leqq|w|\leqq 81$

また，偏角を $0°$ 以上，$360°$ 未満で考えると，$15°\leqq\arg u\leqq 75°$ より，$\arg w=\arg u^4=4\arg u$ なので，$60°\leqq\arg w\leqq 300°$

［解 説］

(1)は有名問題です。共役複素数を用いた解がベストです。(2)は図を利用して考えますが，平行移動に注目すれば結論までも一気です。なお，本年のセンター本試の問題と考え方が似ています。

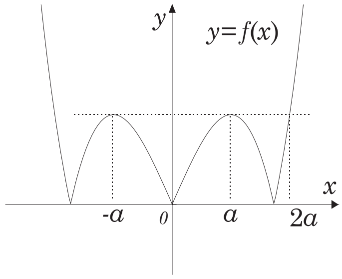
2

問題のページへ

(1)　$g(x)=x^3-3a^2x$ とすると，$f(x)=|g(x)|$

$$g'(x)=3x^2-3a^2=3(x+a)(x-a)$$

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	$2a^3$	$\searrow$	$-2a^3$	$\nearrow$



$g(x)=2a^3$ の解は，$x^3-3a^2x-2a^3=0$ から，

$$(x+a)^2(x-2a)=0,\ x=-a,\ 2a$$

また，$f(-x)=f(x)$ より，$f(x)$ の $-1\leqq x\leqq 1$ における最大値は $0\leqq x\leqq 1$ における最大値と一致する。

(i)　$2a<1$ $\left(0<a<\dfrac{1}{2}\right)$のとき

$$M(a)=f(1)=|g(1)|=g(1)=1-3a^2$$

(ii)　$2a\geqq 1$ かつ $a<1$ $\left(\dfrac{1}{2}\leqq a<1\right)$のとき

$$M(a)=f(a)=|g(a)|=-g(a)=2a^3$$

(iii)　$a\geqq 1$ のとき

$$M(a)=f(1)=|g(1)|=-g(1)=3a^2-1$$

(2)　最大値 $M(a)$ は連続的に変化し，$0<a<\dfrac{1}{2}$ のときは単調減少，$a\geqq\dfrac{1}{2}$ のときは単調増加することより，$M(a)$ が最小となるのは $a=\dfrac{1}{2}$ のときである。

［解 説］

関数のグラフを書き，極値や区間の境界値を比較して最大値を求める問題です。ていねいな場合分けがすべてです。

3

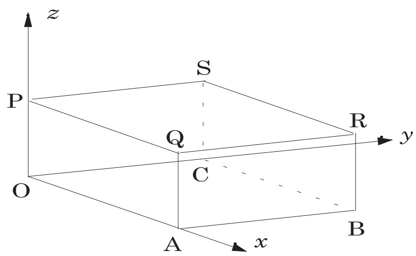
問題のページへ

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}$　$(0\leqq s\leqq 1,\ 0\leqq t\leqq 1)$ とおく。

$(x,\ y,\ 1)=s(2,\ 0,\ 0)+t(0,\ 2,\ 0)+(0,\ 0,\ 1)$

$x=2s,\ \ y=2t$ ………①

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{x}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{y}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}$



(2)　$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=(2,\ 0,\ 1)-(0,\ 2,\ 0)=(2,\ -2,\ 1)$

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=0$

よって，$2x-2y+1=0$

(3)　(2)より，$y=x+\dfrac{1}{2}$ ………②

$$|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2=x^2+y^2+1=x^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1=2x^2+x+\frac{5}{4}=2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$$

ここで，$0\leqq s\leqq 1,\ 0\leqq t\leqq 1$ で①より，$0\leqq x\leqq 2,\ 0\leqq y\leqq 2$ ………③

すると，$x=0$ のとき $|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2$ は最小となるが，このとき②から $y=\dfrac{1}{2}$ となり，これは③をみたす。よって，$(x,\ y)=\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ とき $|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|$ は最小値をとる。

[解 説]

本問の(2)の設問「ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ がベクトル $\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$ と直交する」というのは，高校数学の立場に翻訳すると「ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ がベクトル $\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$ と垂直である」ということでしょう。なお今年，九大では，ベクトルの問題（文系 4D(1)③，理系 5D(1)②）において，問題用紙に「直交する」と書かれていた箇所を「垂直」に直すと問題文に訂正がありました。九大の上記の問題を参照してください。