

1

解答解説のページへ

座標空間内の8点 $O(0, 0, 0)$, $A(2, 0, 0)$, $B(2, 2, 0)$, $C(0, 2, 0)$,
 $P(0, 0, 1)$, $Q(2, 0, 1)$, $R(2, 2, 1)$, $S(0, 2, 1)$ を頂点とする直方体を考える。
次の各問いに答えよ。

- (1) $D = (x, y, 1)$ を面 $PQRS$ 上の点とするときベクトル \overrightarrow{OD} を x, y およびベクトル \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OC} , \overrightarrow{OP} を用いて表せ。
- (2) ベクトル \overrightarrow{OD} がベクトル \overrightarrow{CQ} と直交するための条件を x, y を用いて表せ。
- (3) $\overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{CQ}$ である D の中で $|\overrightarrow{OD}|$ が最小となるような D を与える x, y の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

$0 < a < 4$ とし、座標平面上の 4 点 $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(a, 4 - a)$, $(0, 4 - a)$ を頂点とする長方形の内部を I_a とする。 $y \leq \frac{1}{x}$ をみたす I_a の点 (x, y) 全体のなす図形の面積を $S(a)$ とするとき、次の各問いに答えよ。

- (1) $S(a)$ を a を用いて表せ。
- (2) $S(a)$ の最大値を求めよ。

3

解答解説のページへ

次の各問いに答えよ。

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{とおくとき,}$$

$AB_1 - B_1A$ と $AB_2 - B_2A$ を計算せよ。

- (2) 3×3 行列 A で、任意の 3×3 行列 B に対して $AB = BA$ をみたすものをすべて求めよ。

4

解答解説のページへ

$0 < x < \frac{1}{2}$ とする。一辺の長さが 1 の正方形の紙の 4 つのすみから一辺の長さが x の正方形を切り取りふたのない箱 A を作る。さらに、切り取った一辺の長さが x の正方形の 4 つのすみをそれぞれ切り取り、 A と相似なふたのない箱 B_i ($i = 1, 2, 3, 4$) を作る。次の各問いに答えよ。

- (1) 箱 A の容積 $f(x)$ を最大にする x の値 a を求めよ。
- (2) 箱 B_1 の容積 $g(x)$ を最大にする x の値 b を求めよ。
- (3) 方程式 $f'(x) + 4g'(x) = 0$ が区間 $a < x < b$ に解をもつことを示せ。

5

解答解説のページへ

A 地点から B 地点まで 0 または 1 の一文字からなる信号を送る。A 地点と B 地点の間に中継点を $2n - 1$ 箇所作り AB 間を $2n$ 個の小区間に分割すると、一つの区間において 0 と 1 が逆転して伝わる確率は $\frac{1}{4n}$ である。このとき A 地点を発した信号 0 が

B 地点に 0 として伝わる確率を P_{2n} とする。次の各問いに答えよ。

(1) 偶数回の逆転があると、A 地点で発した信号 0 が B 地点に 0 として伝わることに注意して P_2 を求めよ。

(2) $(a + b)^{2n} + (a - b)^{2n} = 2 \sum_{k=0}^n {}_{2n}C_{2k} a^{2n-2k} b^{2k}$ を示せ。

(3) P_{2n} を求めよ。

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{2n}$ を求めよ。

1

問題のページへ

(1) $\overrightarrow{OD} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OP}$ ($0 \leq s \leq 1$, $0 \leq t \leq 1$) とおく。

$$(x, y, 1) = s(2, 0, 0) + t(0, 2, 0) + (0, 0, 1)$$

$$x = 2s, \quad y = 2t \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{よって, } \overrightarrow{OD} = \frac{x}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{y}{2}\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OP}$$

(2) $\overrightarrow{CQ} = (2, 0, 1) - (0, 2, 0) = (2, -2, 1)$

$$\overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{CQ} \text{ より, } \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{CQ} = 0$$

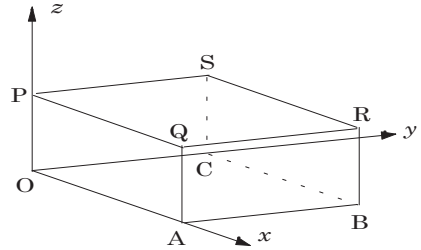
$$\text{よって, } 2x - 2y + 1 = 0$$

(3) (2)より, $y = x + \frac{1}{2} \cdots \cdots \textcircled{2}$

$$|\overrightarrow{OD}|^2 = x^2 + y^2 + 1 = x^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1 = 2x^2 + x + \frac{5}{4} = 2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}$$

$$\text{ここで, } 0 \leq s \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1 \text{ で } \textcircled{1} \text{ より, } 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 2 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

すると, $x = 0$ のとき $|\overrightarrow{OD}|^2$ は最小となるが, このとき $\textcircled{2}$ から $y = \frac{1}{2}$ となり, これは $\textcircled{3}$ をみたらす。よって, $(x, y) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$ のとき $|\overrightarrow{OD}|$ は最小値をとる。



[解説]

本問の(2)の設問「ベクトル \overrightarrow{OD} がベクトル \overrightarrow{CQ} と直交する」というのは、高校数学の立場に翻訳すると「ベクトル \overrightarrow{OD} がベクトル \overrightarrow{CQ} と垂直である」ということでしょう。なお今年、九大では、ベクトルの問題(文系 4D(1)③, 理系 5D(1)②)において、問題用紙に「直交する」と書かれていた箇所を「垂直」に直すと問題文に訂正がありました。九大の上記の問題を参照してください。

2

問題のページへ

(1) $y = \frac{1}{x}$ と $y = 4 - a$ との交点は、
 $\frac{1}{x} = 4 - a$ より、 $x = \frac{1}{4 - a}$

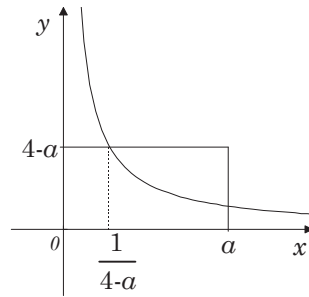
$0 < a < 4$ から、

$$\frac{1}{4 - a} \leq a \Leftrightarrow 1 \leq a(4 - a)$$

$$\Leftrightarrow 2 - \sqrt{3} \leq a \leq 2 + \sqrt{3}$$

$$\frac{1}{4 - a} > a \Leftrightarrow 1 > a(4 - a)$$

$$\Leftrightarrow 0 < a < 2 - \sqrt{3}, \quad 2 + \sqrt{3} < a < 4$$



(i) $2 - \sqrt{3} \leq a \leq 2 + \sqrt{3}$ のとき

$$S(a) = (4 - a) \cdot \frac{1}{4 - a} + \int_{\frac{1}{4-a}}^a \frac{1}{x} dx = 1 + [\log x]_{\frac{1}{4-a}}^a = 1 + \log a(4 - a)$$

(ii) $0 < a < 2 - \sqrt{3}, \quad 2 + \sqrt{3} < a < 4$ のとき

$$S(a) = a(4 - a)$$

(2) (1)より、 $0 < a < 2 - \sqrt{3}$ では $S(a)$ は単調増加、 $2 + \sqrt{3} < a < 4$ では $S(a)$ は単調減少する。

また、 $2 - \sqrt{3} \leq a \leq 2 + \sqrt{3}$ のとき、

$$S(a) = 1 + \log a(4 - a) = 1 + \log \{ -(a - 2)^2 + 4 \} \leq 1 + \log 4$$

ここで、 $S(a)$ は連続的に変化するので、 $S(a)$ の最大値は、 $S(2) = 1 + \log 4$

[解説]

曲線 $y = \frac{1}{x}$ と長方形の辺が交わるかどうかで場合分けが必要です。ポイントはこの点だけです。

3

問題のページへ

$$\begin{aligned}
 (1) \quad AB_1 - B_1A &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_2 & -a_3 \\ b_1 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdots \cdots \textcircled{1} \\
 AB_2 - B_2A &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_1 & a_1 - b_2 & -b_3 \\ 0 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \cdots \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

(2) $AB = BA$ より, $AB - BA = O$ $B = B_1$ のとき①から, $a_2 = a_3 = b_1 = c_1 = 0$ $B = B_2$ のとき②から, $b_1 = b_3 = c_1 = 0, a_1 = b_2$

まとめると, $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ となる。

また, $B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とすると,

$$AB_3 - B_3A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & c_2 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c_2 & a_1 - c_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

 $AB_3 - B_3A = O$ より, $c_2 = 0, a_1 = c_3$

以上から, $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} = a_1 E$ (E は 3×3 の単位行列)

逆に, $A = a_1 E$ のとき任意の B に対して, $AB = BA = a_1 E$ が成立する。

よって, 任意の 3×3 行列 B に対して $AB = BA$ をみたす行列は, a_1 を任意の定数として, $A = a_1 E$ (E は 3×3 の単位行列) となる。

[解説]

(2)は具体的な行列 B で必要条件を求め, その後で十分性を確認するという流れで解く典型問題です。

4

問題のページへ

$$(1) \quad f(x) = (1-2x)^2 x = x(2x-1)^2 \text{ より,}$$

$$f'(x) = (2x-1)^2 + 4x(2x-1)$$

$$= (2x-1)(6x-1)$$

$x = \frac{1}{6}$ のとき, $f(x)$ は最大となる。

すなわち, $a = \frac{1}{6}$

x	0	...	$\frac{1}{6}$...	$\frac{1}{2}$
$f'(x)$		+	0	-	0
$f(x)$		↗		↘	

$$(2) \quad \text{箱 A と } B_1 \text{ の相似比が } 1 : x \text{ から, 体積比は } 1 : x^3 \text{ となる。}$$

$$g(x) = x^3 f(x) = x^4 (2x-1)^2$$

$$g'(x) = 4x^3 (2x-1)^2 + 4x^4 (2x-1)$$

$$= 4x^3 (2x-1)(3x-1)$$

$x = \frac{1}{3}$ のとき, $g(x)$ は最大となる。

すなわち, $b = \frac{1}{3}$

x	0	...	$\frac{1}{3}$...	$\frac{1}{2}$
$g'(x)$	0	+	0	-	0
$g(x)$		↗		↘	

$$(3) \quad h(x) = f'(x) + 4g'(x) \text{ とおくと,}$$

$$h\left(\frac{1}{6}\right) = f'\left(\frac{1}{6}\right) + 4g'\left(\frac{1}{6}\right) = 4g'\left(\frac{1}{6}\right) > 0$$

$$h\left(\frac{1}{3}\right) = f'\left(\frac{1}{3}\right) + 4g'\left(\frac{1}{3}\right) = f'\left(\frac{1}{3}\right) < 0$$

ここで $h(x)$ は連続関数なので, $h(x) = 0$ すなわち $f'(x) + 4g'(x) = 0$ は, 区間 $\frac{1}{6} < x < \frac{1}{3}$ に少なくとも 1 つの解をもつ。

[解説]

微分の応用題ですが, 立式も計算も難しくありません。(3)の後に(4)の設問が続いて存在した気配のある問題です。

5

問題のページへ

(1) $n = 1$ のとき, A 地点から B 地点まで信号の逆転が起こらない確率は $\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2$,

逆転が 2 回起こる確率は $\left(\frac{1}{4}\right)^2$ より,

$$P_2 = \left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} + \frac{1}{16} = \frac{5}{8}$$

$$(2) \quad (a+b)^{2n} = \sum_{k=0}^n {}_{2n}C_{2k} a^{2n-2k} b^{2k} + \sum_{k=1}^n {}_{2n}C_{2k-1} a^{2n-2k+1} b^{2k-1} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} (a-b)^{2n} &= \sum_{k=0}^n {}_{2n}C_{2k} a^{2n-2k} (-b)^{2k} + \sum_{k=1}^n {}_{2n}C_{2k-1} a^{2n-2k+1} (-b)^{2k-1} \\ &= \sum_{k=0}^n {}_{2n}C_{2k} a^{2n-2k} b^{2k} - \sum_{k=1}^n {}_{2n}C_{2k-1} a^{2n-2k+1} b^{2k-1} \dots\dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①+②より

$$(a+b)^{2n} + (a-b)^{2n} = 2 \sum_{k=0}^n {}_{2n}C_{2k} a^{2n-2k} b^{2k} \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

(3) A 地点から B 地点まで信号の逆転が, 0, 2, 4, $\dots\dots$, $2n$ 回するとき, 0 が 0 として伝わるので, $p_n = \frac{1}{4n}$, $q_n = 1 - \frac{1}{4n}$ とおくと,

$$\begin{aligned} P_n &= q_n^{2n} + {}_{2n}C_2 p_n^2 q_n^{2n-2} + {}_{2n}C_4 p_n^4 q_n^{2n-4} + \dots\dots\dots + {}_{2n}C_{2n-2} p_n^{2n-2} q_n^2 + p_n^{2n} \\ &= \sum_{k=0}^n {}_{2n}C_{2k} q_n^{2n-2k} p_n^{2k} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (q_n + p_n)^{2n} + (q_n - p_n)^{2n} \right\} \quad (\textcircled{3} \text{より}) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{2n} \right\} \end{aligned}$$

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_{2n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{2n} \right\} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \left(\left(1 + \frac{1}{-2n}\right)^{-2n} \right)^{-1} \right\} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{e}\right)$$

【解説】

最近はやりの通信を題材とした問題です。非常にていねいな誘導がついています。特に(1)は親切すぎるのではないかと思えるほどです。