1

解答解説のページへ

2 の倍数でも 3 の倍数でもない自然数全体を小さい順に並べてできる数列をa_1，a_2，a_3，……，a_n，……とする。このとき次の各問いに答えよ。

(1) 1003 は数列$\{a_n\}$の第何項か。

(2) a_{2000}の値を求めよ。

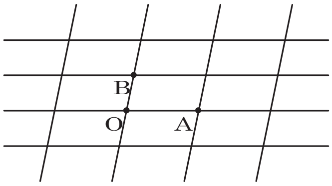
(3) mを自然数とするとき，数列$\{a_n\}$の初項から第$2m$項までの和を求めよ。

2

解答解説のページへ

合同な平行四辺形を平面にしきつめて，図のように 2 組の平行線からなる格子を作り，その各交点を格子点と呼ぶ。

図のような 3 つの格子点 O，A，B について $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$ はすべて整数であるとする。このとき，どの 2 つの格子点 P，Q に対しても $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2$ は整数となることを示せ。



$\boxed{3}$

解答解説のページへ

a, b, c, d は実数として, x の整式 $f(x)$, $g(x)$ が以下の条件を満たしているとする。

$$f(x)+g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

$$f'(x)+g'(x)=bx^2+cx+d$$

$$\int_a^x \{f(t)-g(t)\}dt=x^3-ax^2+ax-2$$

このとき $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　2 の倍数でも 3 の倍数でもない自然数は，6 で割ったとき余りが 1 または 5 の数である。

よって a_n は，n が奇数（$n=2k-1$）のとき 6 で割った余りが 1 の場合なので $a_n=a_{2k-1}=6(k-1)+1=6k-5$，$n$ が偶数（$n=2k$）のとき 6 で割った余りが 5 の場合なので $a_n=a_{2k}=6(k-1)+5=6k-1$ となる。

ここで, 1003 は 6 で割ると余りが 1 より，$6k-5=1003$ とすると，$k=168$

このとき，$n=2\times168-1=335$

(2)　$n=2000$ のとき $2k=2000$ とすると，$k=1000$

よって，$a_{2000}=6\times1000-1=5999$

(3)　求める和を S_{2m} とすると,

$$S_{2m}=\sum_{k=1}^{2m}a_k=\sum_{k=1}^{m}a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{m}a_{2k}=\sum_{k=1}^{m}(6k-5)+\sum_{k=1}^{m}(6k-1)$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(12k-6)=6\sum_{k=1}^{m}(2k-1)=6m^2$$

［解　説］

数列の基本問題です。注意しなくてはいけないのは，計算ミスだけです。

$\boxed{2}$

問題のページへ

まず，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$ ………①

条件より，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$ はすべて整数なので，①より $2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は整数となる。

また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は 1 次独立であり，2 点 P, Q は格子点なので，s, t, u, v を整数として，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は次のように表せる。

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=u\overrightarrow{\mathrm{OA}}+v\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=|(u-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(v-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$$

$$=(u-s)^2|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+2(u-s)(v-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(v-t)^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 \cdots\cdots\cdots ②$$

②の右辺の各項はすべて整数なので，任意の格子点 P，Q に対して，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2$ は整数となる。

［解 説］

不気味なくらい簡単に証明ができてしまいます。何か「ひとひねり」あるのではないかと勘ぐってしまいます。

$\boxed{3}$ 問題のページへ

条件より，$f(x)+g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ………①

$f'(x)+g'(x)=bx^2+cx+d$ ………②

$\int_a^x \{f(t)-g(t)\}dt=x^3-ax^2+ax-2$ ………③

①より，$f'(x)+g'(x)=3ax^2+2bx+c$

②と比べて，$3a=b$，$2b=c$，$c=d$，すなわち $b=3a$，$c=d=6a$ ………④

④を①に代入して，$f(x)+g(x)=ax^3+3ax^2+6ax+6a$ ………⑤

また，③の両辺を微分して，$f(x)-g(x)=3x^2-2ax+a$ ………⑥

③の両辺に $x=a$ を代入して，$a^3-a^3+a^2-2=0$，$a=\pm\sqrt{2}$ ………⑦

⑤⑥より，$f(x)=\dfrac{a}{2}x^3+\dfrac{3a+3}{2}x^2+2ax+\dfrac{7}{2}a$

$g(x)=\dfrac{a}{2}x^3+\dfrac{3a-3}{2}x^2+4ax+\dfrac{5}{2}a$

⑦を代入し，複号同順として，

$f(x)=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x^3\pm\dfrac{3\sqrt{2}\pm3}{2}x^2\pm2\sqrt{2}x\pm\dfrac{7}{2}\sqrt{2}$

$g(x)=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x^3\pm\dfrac{3\sqrt{2}\mp3}{2}x^2\pm4\sqrt{2}x\pm\dfrac{5}{2}\sqrt{2}$

［解　説］

解の方針に迷うところはありません。ただ，⑦の値を先に⑤式と⑥式に代入して $f(x)$，$g(x)$ を求めようとすると，計算がゴチャゴチャしてしまいます。