

1

解答解説のページへ

$0 < a < \frac{\pi}{2}$ とし、関数 $f(x)$ を

$$f(x) = |x - a| \sin x \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

とする。 $y = f(x)$ のグラフと、 x 軸および直線 $x = \frac{\pi}{2}$ で囲まれた 2 つの図形の面積の和を S とするとき、次の各問いに答えよ。

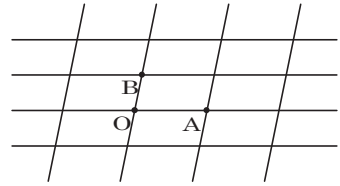
- (1) S を a を用いて表せ。
- (2) a が $0 < a < \frac{\pi}{2}$ の範囲で動くときの S の最小値を求めよ。

2

解答解説のページへ

合同な平行四辺形を平面にしきつめて、図のように 2 組の平行線からなる格子を作り、その各交点を格子点と呼ぶ。

図のような 3 つの格子点 O, A, B について $|\overrightarrow{OA}|^2$, $|\overrightarrow{OB}|^2$, $|\overrightarrow{AB}|^2$ はすべて整数であるとする。このとき、どの 2 つの格子点 P, Q に対しても $|\overrightarrow{PQ}|^2$ は整数となることを示せ。



3

解答解説のページへ

m は実数とし、関数 $f(x)$ を

$$f(x) = (x^2 - x + m) \sin 3\pi x \quad (0 < x < 1)$$

とする。このとき $f(a) = 0$ となる a ($0 < a < 1$) のうち、 $x = a$ を境目にして関数 $f(x)$ の符号が変化するものの個数を求めよ。

4

解答解説のページへ

連立不等式 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{1}{3}$, $x > 3$, $y > 3$ の表す領域を D とする。このとき次の各問いに答えよ。

- (1) D を図示せよ。
- (2) D 内を (x, y) が動くとき $2x + y$ のとる値の最小値を求めよ。また、そのときの x, y の値を求めよ。

5

解答解説のページへ

t は $-1, 0, 1$ のいずれとも異なる実数とする。行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} t^2 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくとき、次の各問いに答えよ。

(1) 3×3 行列 X で $AX = tXA$ を満たすものをすべて求め、 X^3 が零行列となることを示せ。

(2) X は $AX = tXA$ を満たす 3×3 行列であるとする。2 以上の自然数 n に対して

$$(X + A)^n = A^n + b_n XA^{n-1} + c_n X^2 A^{n-2}$$

と書けることを示し、 b_{n+1} , c_{n+1} を b_n , c_n を用いて表せ。ただし、 A^0 は 3 次の単位行列を表すものとする。

1

問題のページへ

$$(1) \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ において, } f(x) = |x - a| \sin x \geq 0$$

$$\text{また, } 0 \leq x < a \text{ で } f(x) = -(x - a) \sin x, \quad a \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ で } f(x) = (x - a) \sin x$$

$$\text{まず, } F(x) = \int (x - a) \sin x \, dx = -(x - a) \cos x + \int \cos x \, dx$$

$$= -(x - a) \cos x + \sin x + C$$

$$F(0) = a + C, \quad F(a) = \sin a + C, \quad F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + C$$

$$\text{すると, } S = \int_0^a -(x - a) \sin x \, dx + \int_a^{\frac{\pi}{2}} (x - a) \sin x \, dx$$

$$= -F(a) + F(0) + F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(a)$$

$$= a + 1 - 2 \sin a$$

$$(2) \quad (1) \text{ より, } S' = 1 - 2 \cos a$$

$$S' = 0 \text{ とすると, } 0 < a < \frac{\pi}{2} \text{ より } a = \frac{\pi}{3}$$

右表より, $a = \frac{\pi}{3}$ のとき S は最小値をとり,

$$\text{その値は } S = \frac{\pi}{3} + 1 - 2 \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3}$$

a	0	...	$\frac{\pi}{3}$...	$\frac{\pi}{2}$
S'		-	0	+	
S		↘		↗	

[解説]

一般的に、面積を求める際には、関数のグラフを書くのが普通ですが、ここでは、 $f(x) \geq 0$ なので、グラフを省略しました。実際、増減を調べてグラフを書くには、関数 $f(x)$ に文字 a が入っているために、かなり複雑な計算が必要です。

2

問題のページへ

$$\text{まず, } |\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}|^2 = |\overrightarrow{OB}|^2 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + |\overrightarrow{OA}|^2 \dots\dots\dots ①$$

条件より, $|\overrightarrow{OA}|^2$, $|\overrightarrow{OB}|^2$, $|\overrightarrow{AB}|^2$ はすべて整数なので, ①より $2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ は整数となる。

また, \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} は 1 次独立であり, 2 点 P, Q は格子点なので, s, t, u, v を整数として, \overrightarrow{OP} , \overrightarrow{OQ} は次のように表せる。

$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{OQ} = u\overrightarrow{OA} + v\overrightarrow{OB}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PQ}|^2 &= |\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}|^2 = |(u-s)\overrightarrow{OA} + (v-t)\overrightarrow{OB}|^2 \\ &= (u-s)^2|\overrightarrow{OA}|^2 + 2(u-s)(v-t)\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + (v-t)^2|\overrightarrow{OB}|^2 \dots\dots\dots ② \end{aligned}$$

②の右辺の各項はすべて整数なので, 任意の格子点 P, Q に対して, $|\overrightarrow{PQ}|^2$ は整数となる。

[解説]

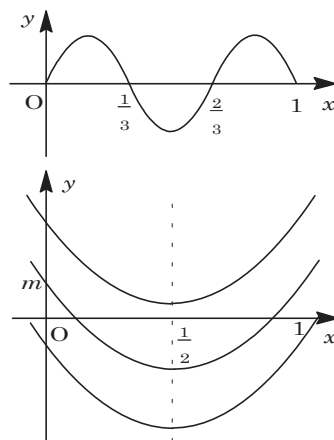
不気味なくらい簡単に証明ができてしまいます。何か「ひとひねり」あるのではないかと勘ぐってしまいます。

3

問題のページへ

$f(x) = (x^2 - x + m)\sin 3\pi x$ に対して, $g(x) = x^2 - x + m$, $h(x) = \sin 3\pi x$ とおくと, $f(x) = g(x)h(x)$ となる。

まず, $y = h(x)$ のグラフは右図のようになり, $h(x)$ ($0 < x < 1$) は, $x = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ の前後で符号変化が起きる。



次に, $g(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + m - \frac{1}{4}$ より, m の値に応じて, $y = g(x)$ グラフは右図のように変化する。

(i) $m - \frac{1}{4} \geq 0$ ($m \geq \frac{1}{4}$) のとき

$0 < x < 1$ で $g(x) \geq 0$ より, $f(x)$ は $x = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ の前後で符号変化が 2 回起きる。

(ii) $m - \frac{1}{4} < 0$ かつ $m > 0$ ($0 < m < \frac{1}{4}$) のとき

$g(x) = 0$ は $0 < x < 1$ に異なる 2 つの解をもつ。

(ii-i) $g\left(\frac{1}{3}\right) = g\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{9} + m = 0$ ($m = \frac{2}{9}$) のとき

$0 < x < \frac{1}{3}$ または $\frac{2}{3} < x < 1$ で $g(x) > 0$, $h(x) > 0$ より $f(x) > 0$, $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$ で $g(x) < 0$, $h(x) < 0$ より $f(x) > 0$ となり, $f(x)$ は符号変化がない。

(ii-ii) $g\left(\frac{1}{3}\right) = g\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{9} + m \neq 0$ ($m \neq \frac{2}{9}$) のとき

$g(x)$ が符号変化する x と $h(x)$ が符号変化する $x = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ とは一致しないので, $f(x)$ は符号変化が 4 回起きる。

(iii) $m \leq 0$ のとき

$0 < x < 1$ で $g(x) < 0$ より, $f(x)$ は $x = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ の前後で符号変化が 2 回起きる。

(i)(ii)(iii) より, 求める個数は, $m = \frac{2}{9}$ のとき 0 個, $m \leq 0$, $\frac{1}{4} \leq m$ のとき 2 個, $0 < m < \frac{2}{9}$, $\frac{2}{9} < m < \frac{1}{4}$ のとき 4 個となる。

[解説]

$y = g(x)$ と $y = h(x)$ のグラフを見ながら考えれば明快です。なお, $y = g(x)$ も $y = h(x)$ も, とともに直線 $x = \frac{1}{2}$ について対称なため, 場合分けが少なくなります。

4

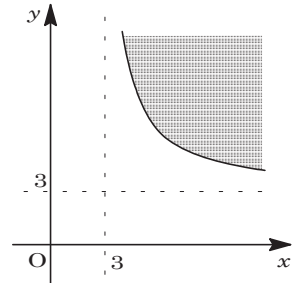
問題のページへ

(1) 条件より, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{1}{3}$ ……①, $x > 3$ ……②, $y > 3$ ……③

①より, $\frac{1}{y} \leq \frac{1}{3} - \frac{1}{x} = \frac{x-3}{3x}$

②③を考慮して, $y \geq \frac{3x}{x-3} = 3 + \frac{9}{x-3}$ ……④

②③④を図示すると, 右図のようになる。ただし, 境界線は含む。



(2) $2x + y = k$ とおくと, $y = -2x + k$ ……⑤

(1)の図より, ④の境界線 $y = \frac{3x}{x-3}$ と⑤が接するとき,

k の値は最小となる。

$$\frac{3x}{x-3} = -2x + k \text{ より, } 2x^2 - (3+k)x + 3k = 0 \text{ ……⑥}$$

$$D = (3+k)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3k = 0$$

$$k^2 - 18k + 9 = 0 \text{ で, 図から } k > 3 \text{ より, } k = 9 + 6\sqrt{2}$$

よって, $2x + y$ のとる値の最小値は $9 + 6\sqrt{2}$ となる。

このとき, ⑥より $x = \frac{3+k}{4} = \frac{6+3\sqrt{2}}{2}$

⑤より $y = -2 \cdot \frac{6+3\sqrt{2}}{2} + (9+6\sqrt{2}) = 3+3\sqrt{2}$

[解説]

不等式で条件付けられた 2 変数関数の最小値を求める問題です。領域の考え方を利用してグラフ処理をするタイプで, 頻出基本題の一つです。

5

問題のページへ

(1) $AX = tXA$ より,

$$\begin{pmatrix} t^2 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \text{とおく} \right]$$

よって, $at^2 = at^3$, $bt^2 = bt^2$, $ct^2 = ct$, $dt = dt^3$, $et = et^2$,

$$ft = ft, \quad g = gt^3, \quad h = ht^2, \quad i = it$$

条件より, $t \neq 0$, $t \neq \pm 1$ なので, $a = c = d = e = g = h = i = 0$ 以上より, $X = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる。ただし, b, f は任意は実数である。

$$\text{このとき, } X^3 = X^2X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & bf \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) $n \geq 2$ で $(X+A)^n = A^n + b_n XA^{n-1} + c_n X^2 A^{n-2}$ と書けることを, 数学的帰納法を用いて示す。(i) $n = 2$ のとき

$$(X+A)^2 = (A+X)(A+X) = A^2 + AX + XA + X^2 = A^2 + (t+1)XA + X^2$$

 $b_2 = t+1$, $c_2 = 1$ とすると, $n = 2$ で成立する。(ii) $n = k$ のとき $(X+A)^k = A^k + b_k XA^{k-1} + c_k X^2 A^{k-2}$ と仮定する。

$$\begin{aligned} (X+A)^{k+1} &= (X+A)^k (X+A) = (A^k + b_k XA^{k-1} + c_k X^2 A^{k-2})(A+X) \\ &= A^{k+1} + b_k XA^k + c_k X^2 A^{k-1} + A^k X + b_k XA^{k-1} X + c_k X^2 A^{k-2} X \end{aligned}$$

ここで, $A^k X = A^{k-1} AX = A^{k-1} tXA = tA^{k-1} XA$ となるので, この操作を繰り返すと, $A^k X = t^k XA^k$, $A^{k-1} X = t^{k-1} XA^{k-1}$, $A^{k-2} X = t^{k-2} XA^{k-2}$

$$\begin{aligned} (X+A)^{k+1} &= A^{k+1} + (b_k + t^k) XA^k + (c_k + t^{k-1} b_k) X^2 A^{k-1} + t^{k-2} c_k X^3 A^{k-2} \\ &= A^{k+1} + (b_k + t^k) XA^k + (c_k + t^{k-1} b_k) X^2 A^{k-1} \quad (X^3 = 0 \text{ より}) \end{aligned}$$

また, $b_{k+1} = b_k + t^k$, $c_{k+1} = c_k + t^{k-1} b_k \cdots \cdots (*)$ とすると, $n = k+1$ のときも成立する。(i)(ii)より, $n \geq 2$ で $(X+A)^n = A^n + b_n XA^{n-1} + c_n X^2 A^{n-2}$ と書ける。また, b_{n+1} , c_{n+1} を b_n , c_n で表すと, (*)より $b_{n+1} = b_n + t^n$, $c_{n+1} = c_n + t^{n-1} b_n$

[解説]

2年連続で 3×3 行列が出ましたが, 今年の問題は注意深い計算が必要です。なお, (2)で $(X+A)^{k+1} = (X+A)(X+A)^k$ とすると, 別の漸化式が得られます。