1

解答解説のページへ

原点を O とし，空間内に 3 点 A$(4,\ 0,\ 0)$，B$(1,\ 2,\ 0)$，C$(2,\ 1,\ 2)$をとる。線分 BC を$t:(1-t)$ $(0<t<1)$に内分する点を P とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　△OAP の面積を最小にする t の値を求めよ。

(2)　C を通り，3 点 O, A, P を通る平面に垂直な直線と xy 平面との交点を D とする。D が△OAB の内部にあるとき，t の範囲を求めよ。

2

解答解説のページへ

赤球 4 個と白球 6 個の入った袋から 2 個の球を同時に取り出し，その中に赤球が含まれていたら，その個数だけさらに袋から球を取り出す。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 取り出した赤球の総数が 2 である確率を求めよ。

(2) 取り出した赤球の総数が，取り出した白球の総数をこえる確率を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

関数 $f(x)=\int_{x}^{\frac{\pi}{4}-x}\log_4(1+\tan t)\,dt$ $\left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{8}\right)$について，以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2)　$f(0)$ の値を求めよ。

(3)　条件 $a_1=f(0)$，$a_{n+1}=f(a_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1) p を 0 でない定数とする。関数 $f(x)=ae^{-x}\sin px+be^{-x}\cos px$ について，$f'(x)=e^{-x}\sin px$ となるように，定数 $a,\ b$ を定めよ。

(2) $S(t)=\int_0^{t^2} e^{-x}\sin\dfrac{x}{t}dx \quad (t\neq 0)$ とおく。このとき，$S(t)$ を求めよ。

(3) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{S(t)}{t^3}$ の値を求めよ。

1　　問題のページへ

(1)　2 点 $B(1,\ 2,\ 0)$，$C(2,\ 1,\ 2)$ に対して，線分 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を $P(x,\ y,\ z)$ とすると，

$$x=2t+(1-t)=t+1,\quad y=t+2(1-t)=-t+2,\quad z=2t$$

$A(4,\ 0,\ 0)$ から，$\triangle OAP$ の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OP}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{16\{(t+1)^2+(-t+2)^2+4t^2\}-\{4(t+1)\}^2}=2\sqrt{(-t+2)^2+4t^2}$$

$$=2\sqrt{5t^2-4t+4}=2\sqrt{5\left(t-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{16}{5}}$$

よって，$0<t<1$ から，$t=\frac{2}{5}$ のとき，$\triangle OAP$ の面積は最小となる。

(2)　3 点 O, A, P を通る平面に垂直なベクトルを $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ とおくと，

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{OA}=4a=0\ \cdots\cdots①,\quad \vec{n}\cdot\overrightarrow{OP}=a(t+1)+b(-t+2)+2ct=0\ \cdots\cdots②$$

①より $a=0$ となり，②に代入すると，$c=\frac{t-2}{2t}b$ となり，

$$\vec{n}=\left(0,\ b,\ \frac{t-2}{2t}b\right)=\frac{b}{2t}(0,\ 2t,\ t-2)$$

これより，点 C を通り，$\vec{n}$ を方向ベクトルとする直線は，u をパラメータとして，

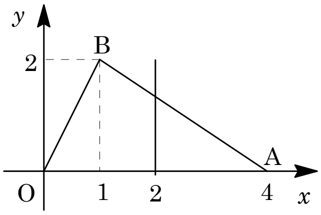
$$(x,\ y,\ z)=(2,\ 1,\ 2)+u(0,\ 2t,\ t-2)$$

xy 平面との交点 D は，$z=0$ として，$2+u(t-2)=0$，$u=\frac{2}{2-t}$ となり，

$$(x,\ y,\ z)=(2,\ 1,\ 2)+\frac{2}{2-t}(0,\ 2t,\ t-2)=\left(2,\ \frac{2+3t}{2-t},\ 0\right)$$

よって，$D\left(2,\ \frac{2+3t}{2-t},\ 0\right)$ である。

さて，直線 AB の方程式は，$y=-\frac{2}{3}(x-4)$ となり，直線 $x=2$ との交点は，$y=\frac{4}{3}$ である。



これより，点 D が $\triangle OAB$ の内部にある条件は，

$$0<\frac{2+3t}{2-t}<\frac{4}{3}$$

すると，$0<t<1$ から，左側の不等式は成立し，右側の不等式から，

$$3(2+3t)<4(2-t),\quad t<\frac{2}{13}$$

以上より，$0<t<\frac{2}{13}$

［解　説］

(2)は，与えられた点の座標との相性を考え，座標計算で進めました。ベクトルを前面に出す解法も可能です。

© 電送数学舎 2010

2

問題のページへ

(1) 初めに，赤球 4 個と白球 6 個の異なる 10 個の球が袋に入っているとし，この中から球を取り出す。

さて，条件の試行で，取り出した赤球の総数が 2 となる確率は，

(i) 1 回目が赤球 1 個，白球 1 個, 2 回目が赤球 1 個を取り出すとき

$$\frac{{}_4C_1 \times {}_6C_1}{{}_{10}C_2} \times \frac{{}_3C_1}{{}_8C_1} = \frac{24}{45} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{5}$$

(ii) 1 回目が赤球 2 個, 2 回目が白球 2 個を取り出すとき

$$\frac{{}_4C_2}{{}_{10}C_2} \times \frac{{}_6C_2}{{}_8C_2} = \frac{6}{45} \times \frac{15}{28} = \frac{1}{14}$$

(i)(ii)より，求める確率は，$\frac{1}{5} + \frac{1}{14} = \frac{19}{70}$

(2) 取り出した赤球の総数が，取り出した白球の総数をこえる場合は，(1)の(i)以外に，次の場合がある。この確率は，

(iii) 1 回目が赤球 2 個を取り出し, 2 回目が白球 2 個を取り出す以外のとき

$$\frac{6}{45} \times \left(1 - \frac{15}{28}\right) = \frac{13}{210}$$

(i)(iii)より，求める確率は，$\frac{1}{5} + \frac{13}{210} = \frac{11}{42}$

［解 説］

確率の基本問題です。(2)は(1)のプロセスの再利用で解けます。

© 電送数学舎 2010

３

問題のページへ

(1)　$f(x)=\int_{x}^{\frac{\pi}{4}-x}\log_4(1+\tan t)\,dt\quad\left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{8}\right)$に対して，

$$f'(x)=-\log_4\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)-\log_4(1+\tan x)$$

ここで，$1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}=\frac{2}{1+\tan x}$ より，

$$f'(x)=-\log_4\frac{2}{1+\tan x}-\log_4(1+\tan x)=-\log_4\frac{2(1+\tan x)}{1+\tan x}=-\log_4 2$$

$$=-\log_4 4^{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}$$

(2)　(1)より, C を定数として，$f(x)=-\frac{1}{2}x+C$

さて，$f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}}\log_4(1+\tan t)\,dt=0$ より，$-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{8}+C=0$ となり $C=\frac{\pi}{16}$ から，

$$f(0)=C=\frac{\pi}{16}$$

(3)　$a_1=f(0)=\frac{\pi}{16}$，$a_{n+1}=f(a_n)=-\frac{1}{2}a_n+\frac{\pi}{16}$ より，

$$a_{n+1}-\frac{\pi}{24}=-\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{\pi}{24}\right)$$

これより，$a_n-\frac{\pi}{24}=\left(\frac{\pi}{16}-\frac{\pi}{24}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{\pi}{48}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ となり，

$$a_n=\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{48}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

［解　説］

底が 4 の対数というのは, 見た目と異なり配慮の結果でした。なお, (2)の出来がポイントですが, 運・不運が反映します。他学部では, この設問に誘導がついていますので, 出題者は上の解法を想定したものと思われます。

© 電送数学舎 2010

4

問題のページへ

(1)　$f(x) = ae^{-x}\sin px + be^{-x}\cos px$ に対して，

$$f'(x) = -ae^{-x}\sin px + ape^{-x}\cos px - be^{-x}\cos px - bpe^{-x}\sin px$$
$$= -(a+bp)e^{-x}\sin px + (ap-b)e^{-x}\cos px$$

条件より，$f'(x) = e^{-x}\sin px$ なので，

$$-(a+bp+1)e^{-x}\sin px + (ap-b)e^{-x}\cos px = 0 \cdots\cdots\cdots ①$$

任意の x に対して，①が成立する条件を求める。

$x=0$，$x=\dfrac{\pi}{2p}$ に対して成立することより，

$$ap-b=0\cdots\cdots\cdots②,\quad a+bp+1=0\cdots\cdots\cdots③$$

逆に，②③が成立するとき，任意の x に対して，明らかに①は成立する。

そこで，②より $b=ap$ となり，③に代入すると，$(1+p^2)a+1=0$

$$a=-\frac{1}{1+p^2},\quad b=-\frac{p}{1+p^2}$$

(2)　(1)において，$p=\dfrac{1}{t}$ とおくと，$a=-\dfrac{t^2}{t^2+1}$，$b=-\dfrac{t}{t^2+1}$ となり，

$$S(t)=\int_0^{t^2} e^{-x}\sin\frac{x}{t}dx = \left[-\frac{t^2}{t^2+1}e^{-x}\sin\frac{x}{t}-\frac{t}{t^2+1}e^{-x}\cos\frac{x}{t}\right]_0^{t^2}$$
$$=-\frac{t^2}{t^2+1}e^{-t^2}\sin t-\frac{t}{t^2+1}(e^{-t^2}\cos t-1)$$

(3)　(2)から，$\dfrac{S(t)}{t^3}=-\dfrac{1}{t^2+1}e^{-t^2}\cdot\dfrac{\sin t}{t}-\dfrac{1}{t^2+1}\cdot\dfrac{e^{-t^2}\cos t-1}{t^2}$ となり，

$$\frac{e^{-t^2}\cos t-1}{t^2}=\frac{\cos t-e^{t^2}}{t^2e^{t^2}}=\frac{\cos t-1-(e^{t^2}-1)}{t^2e^{t^2}}=\frac{\cos t-1}{t^2e^{t^2}}-\frac{e^{t^2}-1}{t^2e^{t^2}}$$
$$=\frac{-\sin^2 t}{t^2e^{t^2}(\cos t+1)}-\frac{e^{t^2}-1}{t^2e^{t^2}}=-\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\cdot\frac{1}{e^{t^2}(\cos t+1)}-\frac{e^{t^2}-1}{t^2}\cdot\frac{1}{e^{t^2}}$$
$$\to -1^2\cdot\frac{1}{2}-1\cdot 1=-\frac{3}{2}\quad (t\to 0)$$

よって，$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{S(t)}{t^3}=-1-\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}$

［解　説］

見かけは，誘導つきの定積分の計算問題ですが，難所は極限の計算です。解き終えてみれば，1 を引いて 1 を足すだけの操作でしたが，この考えに至るまでには，試行錯誤が必要でした。

© 電送数学舎 2010