1

解答解説のページへ

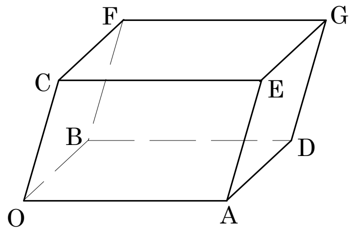
$x,\ y$ を整数とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　x^5-x は 30 の倍数であることを示せ。

(2)　x^5y-xy^5 は 30 の倍数であることを示せ。

2

解答解説のページへ



平行六面体 OADB-CEGF において，辺 OA の中点を M，辺 AD を $2:3$ に内分する点を N，辺 DG を $1:2$ に内分する点を L とする。また，辺 OC を $k:1-k\ (0<k<1)$ に内分する点を K とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$，$\overrightarrow{\mathrm{ML}}$，$\overrightarrow{\mathrm{MK}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 3 点 M, N, K の定める平面上に点 L があるとき，k の値を求めよ。

(3) 3 点 M, N, K の定める平面が辺 GF と交点をもつような k の値の範囲を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

楕円 $C: x^2 + 4y^2 = 4$ と点 $\mathrm{P}(2,\ 0)$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　直線 $y = x + b$ が楕円 C と異なる 2 つの交点をもつような b の値の範囲を求めよ。

(2)　(1)における 2 つの交点を A, B とするとき，三角形 PAB の面積が最大となるような b の値を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

xyz 空間内の 3 点 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{Q}(0,\ 0,\ -1)$，$\mathrm{R}(t,\ t^2-t+1,\ 0)$ を考える。t が $0 \leqq t \leqq 2$ の範囲を動くとき，三角形 PQR が通過してできる立体を K とする。以下の問いに答えよ。

(1) K を xy 平面で切ったときの断面積を求めよ。

(2) K の体積を求めよ。

$\boxed{1}$ 問題のページへ

(1)　整数 x に対して，$f(x)=x^5-x=x(x-1)(x+1)(x^2+1)\cdots\cdots(*)$とおく。

ここで，$x(x-1)(x+1)$ は連続する 3 整数の積なので 6 の倍数であり，$(*)$より，$f(x)$ は 6 の倍数となる。

また，k を整数として，x を分類すると，

(i)　$x=5k$ のとき　$(*)$より，$f(x)$ は 5 の倍数。

(ii)　$x=5k\pm1$ のとき

$(x-1)(x+1)=5k(5k\pm2)$ なので，$(*)$より，$f(x)$ は 5 の倍数。

(iii)　$x=5k\pm2$ のとき

$x^2+1=25k^2\pm20k+5=5(5k^2\pm4k+1)$ なので，$(*)$より，$f(x)$ は 5 の倍数。

(i)～(iii)より，どんな整数 x に対しても，$f(x)$ は 5 の倍数である。

したがって，6 と 5 は互いに素から，$f(x)$ は $6\times5=30$ の倍数となる。

(2)　整数 x, y に対して，

$$g(x,\ y)=x^5y-xy^5=x^5y-xy+xy-xy^5=y(x^5-x)-x(y^5-y)$$

ここで，(1)より，x^5-x，y^5-y は，ともに 30 の倍数である。

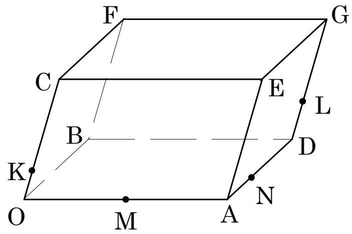
よって，$g(x,\ y)$ は 30 の倍数となる。

［解　説］

整数についての基本的な問題です。(2)では，積の微分法の公式を証明するときに現れる式変形を思い浮かべ，$g(x,\ y)$ を変形しました。

2

問題のページへ



(1)　条件より，$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{AN}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{2}{5}\vec{b}$

$$\overrightarrow{\mathrm{ML}}=\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DL}}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{MK}}=\overrightarrow{\mathrm{MO}}+\overrightarrow{\mathrm{OK}}=-\frac{1}{2}\vec{a}+k\vec{c}$$

(2)　3 点 M, N, K の定める平面上に点 L があることより, s, t を定数として,

$$\overrightarrow{\mathrm{ML}}=s\overrightarrow{\mathrm{MN}}+t\overrightarrow{\mathrm{MK}}$$

(1)より，$\dfrac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}=s\left(\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{2}{5}\vec{b}\right)+t\left(-\dfrac{1}{2}\vec{a}+k\vec{c}\right)$ ………①

ここで，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立なので，①より，

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}t\ \cdots\cdots\cdots②,\quad 1=\frac{2}{5}s\ \cdots\cdots\cdots③,\quad \frac{1}{3}=tk\ \cdots\cdots\cdots④$$

②③より，$s=\dfrac{5}{2}$，$t=\dfrac{3}{2}$ となり，④に代入すると，$k=\dfrac{2}{9}$ である。

(3)　辺 GF 上の点を P とすると，$\overrightarrow{\mathrm{FP}}=p\vec{a}$　$(0\leqq p\leqq 1)$ と表せ,

$$\overrightarrow{\mathrm{MP}}=\overrightarrow{\mathrm{MO}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BF}}+\overrightarrow{\mathrm{FP}}=\left(p-\frac{1}{2}\right)\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

また, 3 点 M, N, K の定める平面上に点 P があることより, (2)と同様にして,

$$\overrightarrow{\mathrm{MP}}=s\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}\right)+t\left(-\frac{1}{2}\vec{a}+k\vec{c}\right)=\left(\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}t\right)\vec{a}+\frac{2}{5}s\vec{b}+tk\vec{c}\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

ここで，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立なので，⑤⑥より，

$$p-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}t\ \cdots\cdots\cdots⑦,\quad 1=\frac{2}{5}s\ \cdots\cdots\cdots⑧,\quad 1=tk\ \cdots\cdots\cdots⑨$$

⑦⑧より，$s=\dfrac{5}{2}$，$t=\dfrac{7}{2}-2p$ となり，⑨に代入すると，$k=\dfrac{2}{7-4p}$ ………⑩

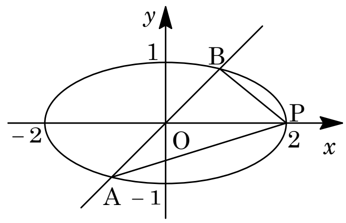
よって，$0\leqq p\leqq 1$ から $3\leqq 7-4p\leqq 7$ となり，⑩より $\dfrac{2}{7}\leqq k\leqq\dfrac{2}{3}$ である。

［解 説］

平行六面体を題材とした空間ベクトルの基本的な問題です。なお，(2)で，$\overrightarrow{\mathrm{ML}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{MK}}$ の 1 次結合で表したのは，次の設問(3)の問題文によります。

$\boxed{3}$

問題のページへ



(1)　$C: x^2+4y^2=4$ ……①と直線 $y=x+b$ ……②を連立すると，$x^2+4(x+b)^2=4$ となり，

$$5x^2+8bx+4b^2-4=0 \cdots\cdots\cdots ③$$

①と②が異なる 2 つの交点をもつことより，

$$D/4=16b^2-5(4b^2-4)=-4(b^2-5)>0$$

よって，$-\sqrt{5}<b<\sqrt{5}$ である。

(2)　③の実数解を $x=\alpha,\ \beta$ とおくと，$\alpha+\beta=-\dfrac{8}{5}b$，$\alpha\beta=\dfrac{4b^2-4}{5}$ ………④

これより，$A(\alpha,\ \alpha+b)$，$B(\beta,\ \beta+b)$ とおくことができ，

$$\overrightarrow{PA}=(\alpha-2,\ \alpha+b),\ \overrightarrow{PB}=(\beta-2,\ \beta+b)$$

ここで，△PAB の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\left|(\alpha-2)(\beta+b)-(\beta-2)(\alpha+b)\right|=\frac{1}{2}\left|(b+2)(\alpha-\beta)\right|$$

④から，$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\dfrac{64}{25}b^2-\dfrac{16b^2-16}{5}=\dfrac{16}{25}(-b^2+5)$ となり，

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\left|(b+2)(-b^2+5)^{\frac{1}{2}}\right|=\frac{2}{5}\left|(b+2)^2(-b^2+5)\right|^{\frac{1}{2}} \cdots\cdots\cdots ⑤$$

ここで，$f(b)=(b+2)^2(-b^2+5)$ とおくと，⑤より $S=\dfrac{2}{5}\left|f(b)\right|^{\frac{1}{2}}$ であり，

$$f'(b)=2(b+2)(-b^2+5)-(b+2)^2\cdot 2b=-2(b+2)(2b^2+2b-5)$$

$f'(b)=0$ の解は $b=-2,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{11}}{2}$ から，$\gamma=\dfrac{-1-\sqrt{11}}{2}$，$\delta=\dfrac{-1+\sqrt{11}}{2}$ とおく。

$-\sqrt{5}<\gamma<-2<\delta<\sqrt{5}$ となるので，$f(b)$ の増減は右表のようになる。

b	$-\sqrt{5}$	$\cdots$	γ	$\cdots$	-2	$\cdots$	δ	$\cdots$	$\sqrt{5}$
$f'(b)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(b)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

さて，$f(\gamma)$ と $f(\delta)$ の大小を比べるために，$f(b)$ を $2b^2+2b-5$ で割ると，

$$f(b)=(2b^2+2b-5)\left(-\frac{1}{2}b^2-\frac{3}{2}b+\frac{3}{4}\right)+11b+\frac{95}{4}$$

これより，$f(\gamma)=11\gamma+\dfrac{95}{4}$，$f(\delta)=11\delta+\dfrac{95}{4}$ となり，$f(\gamma)<f(\delta)$

よって，$f(b)$ は $b=\delta$ で最大，すなわち S は $b=\dfrac{-1+\sqrt{11}}{2}$ のとき最大となる。

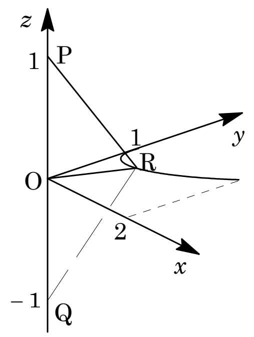
［解　説］

計算量の非常に多い問題です。上の解答例では記述を省略しましたが，$f(b)$ を $2b^2+2b-5$ で割る計算は相当なものです。

4

問題のページへ

(1)　まず，△PQR の xy 平面での切り口は，線分 OR である。すると，立体 K を xy 平面で切ったときの断面は，線分 OR の通過領域として求められる。



さて，$0\leqq t\leqq 2$ のとき，点 $\mathrm{R}(t,\ t^2-t+1,\ 0)$ は，xy 平面上で放物線 $y=x^2-x+1\ (0\leqq x\leqq 2)$ ……①を描く。

以下，xy 平面上で考えると，①から，$y'=2x-1$ となり，点 $(a,\ a^2-a+1)$ における接線の方程式は，

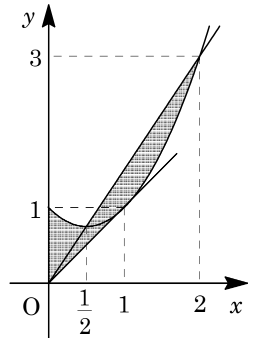
$$y-(a^2-a+1)=(2a-1)(x-a)\ \cdots\cdots\cdots②$$

原点を通るとき，$-(a^2-a+1)=-a(2a-1)$，$a^2-1=0$

$0\leqq a\leqq 2$ から $a=1$ であり，このとき②は，$y=x$ となる。

さらに，$t=2$ のとき $\mathrm{R}(2,\ 3)$ で，直線 $\mathrm{OR}: y=\dfrac{3}{2}x$ と放物線①との交点は，$x^2-x+1=\dfrac{3}{2}x$ より，

$$2x^2-5x+2=0,\ x=\frac{1}{2},\ 2$$



以上より，線分 OR の通過領域は，右図の網点部となり，その面積を S_0 とすると，

$$S_0=\int_0^1(x^2-x+1)dx-\frac{1}{2}\times 1^2+\int_{\frac{1}{2}}^2\left\{\frac{3}{2}x-(x^2-x+1)\right\}dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1-\frac{1}{2}+\int_{\frac{1}{2}}^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)\,dx$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\left(2-\frac{1}{2}\right)^3=\frac{43}{48}$$

(2)　まず，立体 K を z 軸に垂直な平面で切ったときの断面は，K を xy 平面で切ったときの断面と相似である。

そこで，$0\leqq k\leqq 1$ のとき，K を平面 $z=k$ で切ったときの断面積を S_k とおくと，相似比が $1-k:1$ であることから，$S_k:S_0=(1-k)^2:1$ となり，

$$S_k=(1-k)^2S_0=\frac{43}{48}(1-k)^2$$

立体 K は xy 平面について対称なので，その体積 V は，

$$V=2\int_0^1 S_k\,dk=\frac{43}{24}\int_0^1(k-1)^2\,dk=\frac{43}{72}\Big[(k-1)^3\Big]_0^1=\frac{43}{72}$$

［解　説］

設問(1)の定点通過する線分 OR の通過領域は，図形的に解いています。