1

解答解説のページへ

$X,\ Y$ は $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ の空でない部分集合で，$X \cap Y$ は空集合とする。また，n を自然数とする。A 君，B 君が以下のルールで対戦する。

(i)　1 回目の対戦では，まず A 君がさいころを投げて，出た目が X に属するならば A 君の勝ちとする。出た目が X に属さなければ B 君がさいころを投げて，出た目が Y に属するならば B 君の勝ちとする。

(ii)　1 回目の対戦で勝負がつかなかった場合は，1 回目と同じ方法で 2 回目以降の対戦を行い，どちらかが勝つまで続ける。ただし，n 回対戦して勝負がつかなかった場合は引き分けにする。

以下の問いに答えよ。

(1)　さいころを投げたとき，$X,\ Y$ に属する目が出る確率をそれぞれ $p,\ q$ とする。A 君が勝つ確率を求めよ。

(2)　A 君が勝つ確率が，B 君が勝つ確率よりも大きくなるような集合の組 $(X,\ Y)$ は何通りあるか。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

O を原点とする空間内の 2 点 $\mathrm{A}(-1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{B}(2,\ 1,\ -2)$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\geqq 0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\geqq 0$ を満たす平面 OAB 上の点 P からなる領域を D とする。以下の問いに答えよ。

(1) 実数 k に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ によって定まる点 Q が領域 D に含まれるとき，k の値の範囲を求めよ。

(2) 点 C を中心とする半径 $\sqrt{6}$ の円が領域 D に含まれるとき，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|$ が最小となる C の座標を求めよ。

3

解答解説のページへ

半径 1，中心角 θ $(0<\theta<\pi)$ の扇形に内接する円の半径を $f(\theta)$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$f(\theta)$ を求めよ。

(2)　$0<\theta<\pi$ の範囲で $f(\theta)$ は単調に増加し，$f'(\theta)$ は単調に減少することを示せ。

(3)　定積分 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)\,d\theta$ を求めよ。

4

解答解説のページへ

xy 平面上で，点$(1,\ 0)$までの距離と y 軸までの距離の和が 2 である点の軌跡を C とする。以下の問いに答えよ。

(1) C で囲まれた部分の面積を求めよ。

(2) a を正の数とする。円 $x^2+y^2=a$ と C の交点の個数が，a の値によってどのように変わるかを調べよ。

1

問題のページへ

(1)　A 君がさいころを投げて出た目が X に属するのを○, 属さないのを●, B 君がさいころを投げて出た目が Y に属するのを□, 属さないのを■で表す。すると, A 君が勝つ場合は, ○, ●■○, ●■●■○, ……となる。

さいころを投げたとき, X, Y に属する目が出る確率はそれぞれ p, q なので, A 君が勝つ確率 $P(A)$ は, $0<p<1$, $0<q<1$, $p+q\leqq 1$ ……①のもとで,

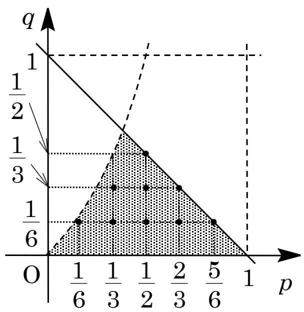
$$P(A)=p+(1-p)(1-q)p+(1-p)^2(1-q)^2p+\cdots+(1-p)^{n-1}(1-q)^{n-1}p$$
$$=p\cdot\frac{1-(1-p)^n(1-q)^n}{1-(1-p)(1-q)}$$

(2)　B 君が勝つ場合は, ●□, ●■●□, ●■●■●□, ……となるので, その確率 $P(B)$ は, (1)と同様にして,

$$P(B)=(1-p)q+(1-p)^2(1-q)q+(1-p)^3(1-q)^2q+\cdots\cdots$$
$$+(1-p)^n(1-q)^{n-1}q=(1-p)q\cdot\frac{1-(1-p)^n(1-q)^n}{1-(1-p)(1-q)}$$

条件より $P(A)>P(B)$ なので, $p>(1-p)q$ となり,

$$q<\frac{p}{1-p}=-1-\frac{1}{p-1}\ \cdots\cdots\cdots ②$$



①②を満たす領域は右図の網点部となり, p, q のとり得る値は, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$ から,

(i)　$(p,\ q)=\left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{6}\right)$ のとき

$(X,\ Y)$ の組の数は, ${}_6\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_1=30$

(ii)　$(p,\ q)=\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{6}\right)$, $\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$ のとき

$(X,\ Y)$ の組の数は, ${}_6\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_1+{}_6\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_2=150$

(iii)　$(p,\ q)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{6}\right)$, $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ のとき

$(X,\ Y)$ の組の数は, ${}_6\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_1+{}_6\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_2+{}_6\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_3=140$

(iv)　$(p,\ q)=\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{6}\right)$, $\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$ のとき

$(X,\ Y)$ の組の数は, ${}_6\mathrm{C}_4\times{}_2\mathrm{C}_1+{}_6\mathrm{C}_4\times{}_2\mathrm{C}_2=45$

(v)　$(p,\ q)=\left(\frac{5}{6},\ \frac{1}{6}\right)$ のとき　$(X,\ Y)$ の組の数は, ${}_6\mathrm{C}_5\times{}_1\mathrm{C}_1=6$

(i)～(v)より, $(X,\ Y)$ の組の総数は, $30+150+140+45+6=371$

［解 説］

プロセスは難しくないのですが, 注意深さが求められる問題です。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　$\mathrm{A}(-1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{B}(2,\ 1,\ -2)$，$\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$に対し$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\geqq 0$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\geqq 0$より，

$$-x+y+z\geqq 0\cdots\cdots\cdots①,\ 2x+y-2z\geqq 0\cdots\cdots\cdots②$$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$から，

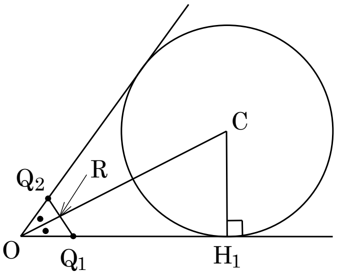
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k(-1,\ 1,\ 1)+(1-k)(2,\ 1,\ -2)=(-3k+2,\ 1,\ 3k-2)\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，点Qは直線AB上にあるので，領域Dに含まれる条件は，①②から，

$$-(-3k+2)+1+3k-2\geqq 0\cdots\cdots④,\ 2(-3k+2)+1-2(3k-2)\geqq 0\cdots\cdots⑤$$

④から$6k-3\geqq 0$より$k\geqq\frac{1}{2}$，⑤から$-12k+9\geqq 0$より$k\leqq\frac{3}{4}$なので，$\frac{1}{2}\leqq k\leqq\frac{3}{4}$

(2)　(1)より，$k=\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}$のときの点 Q をそれぞれ$\mathrm{Q}_1$，$\mathrm{Q}_2$とおくと，③より，



$$\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}=\left(\frac{1}{2},\ 1,\ -\frac{1}{2}\right),\ \overrightarrow{\mathrm{OQ_2}}=\left(-\frac{1}{4},\ 1,\ \frac{1}{4}\right)$$

さて，領域Dに含まれる点 C を中心とする半径$\sqrt{6}$の円で$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$が最小となるのは，この円が半直線$\mathrm{OQ}_1$，$\mathrm{OQ}_2$に接するときである。すなわち，半直線OCは$\angle\mathrm{Q_1OQ_2}$の二等分線となり，半直線OCと線分$\mathrm{Q_1Q_2}$の交点をRとおくと，

$$\mathrm{Q_1R}:\mathrm{Q_2R}=|\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}|:|\overrightarrow{\mathrm{OQ_2}}|=\frac{\sqrt{6}}{2}:\frac{3\sqrt{2}}{4}=2:\sqrt{3}$$

これより，tを正の定数として，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=t(\sqrt{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}+2\overrightarrow{\mathrm{OQ_2}})$と表せる。

さらに，円と半直線OQ_1の接点をH_1とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ_2}}=\frac{3}{4}$から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}=t(\sqrt{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}+2\overrightarrow{\mathrm{OQ_2}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}=\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}+\frac{3}{2}\right)t=\frac{3}{2}(\sqrt{3}+1)t$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OH_1}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}=\frac{\frac{3}{2}(\sqrt{3}+1)t}{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}=(\sqrt{3}+1)t\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CH_1}}&=\overrightarrow{\mathrm{OH_1}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(\sqrt{3}+1)t\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}-t(\sqrt{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}+2\overrightarrow{\mathrm{OQ_2}})\\&=t(\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}-2\overrightarrow{\mathrm{OQ_2}})=t(1,\ -1,\ -1)\end{aligned}$$

$t>0$より，$|\overrightarrow{\mathrm{CH_1}}|=\sqrt{3}t$となり，条件より$\sqrt{3}t=\sqrt{6}$から$t=\sqrt{2}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\sqrt{2}(\sqrt{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}+2\overrightarrow{\mathrm{OQ_2}})=\sqrt{6}\left(\frac{1}{2},\ 1,\ -\frac{1}{2}\right)+2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{4},\ 1,\ \frac{1}{4}\right)$$

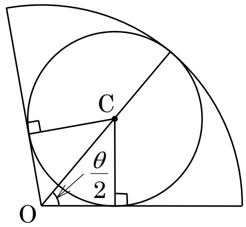
よって，求める点Cの座標は，$\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2},\ \sqrt{6}+2\sqrt{2},\ \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)$である。

［解　説］

計算量が多いため，細かな説明は省略ぎみの解答例となっています。

3

問題のページへ



(1) 右図において，$\mathrm{OC}=1-f(\theta)$ より，

$$\{1-f(\theta)\}\sin\frac{\theta}{2}=f(\theta),\ \left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)f(\theta)=\sin\frac{\theta}{2}$$

$0<\theta<\pi$ から，$f(\theta)=\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}$

(2) $\varphi=\dfrac{\theta}{2}$ とおくと $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ となり，$f(\theta)=g(\varphi)=\dfrac{\sin\varphi}{1+\sin\varphi}$ とすると，

$$f'(\theta)=g'(\varphi)\frac{d\varphi}{d\theta}=\frac{1}{2}g'(\varphi)\cdots\cdots①,\ f''(\theta)=\frac{1}{2}g''(\varphi)\frac{d\varphi}{d\theta}=\frac{1}{4}g''(\varphi)\cdots\cdots②$$

$$g'(\varphi)=\frac{\cos\varphi(1+\sin\varphi)-\sin\varphi\cos\varphi}{(1+\sin\varphi)^2}=\frac{\cos\varphi}{(1+\sin\varphi)^2}>0$$

すると，①より $f'(\theta)>0$ となり，$f(\theta)$ は単調に増加する。

$$g''(\varphi)=\frac{-\sin\varphi(1+\sin\varphi)^2-\cos\varphi\cdot 2(1+\sin\varphi)\cos\varphi}{(1+\sin\varphi)^4}$$

$$=\frac{-\sin\varphi(1+\sin\varphi)-2(1-\sin^2\varphi)}{(1+\sin\varphi)^3}=\frac{-\sin\varphi-2(1-\sin\varphi)}{(1+\sin\varphi)^2}$$

$$=\frac{\sin\varphi-2}{(1+\sin\varphi)^2}<0$$

すると，②より $f''(\theta)<0$ となり，$f'(\theta)$ は単調に減少する。

(3) $\varphi=\dfrac{\theta}{2}$ とおき，$I=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}f(\theta)d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}g(\varphi)2d\varphi$ とすると，

$$I=2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\varphi}{1+\sin\varphi}d\varphi=2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\varphi(1-\sin\varphi)}{\cos^2\varphi}d\varphi$$

$$=2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}d\varphi-2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\varphi\,d\varphi=2\Big[\frac{1}{\cos\varphi}\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}-2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\Big(\frac{1}{\cos^2\varphi}-1\Big)d\varphi$$

$$=2\Big(\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}\Big)-2\Big[\tan\varphi-\varphi\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=2\sqrt{2}-\frac{4}{\sqrt{3}}-2\Big(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)+2\Big(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\Big)$$

$$=2\sqrt{2}-\frac{2}{3}\sqrt{3}-2+\frac{\pi}{6}$$

［解　説］

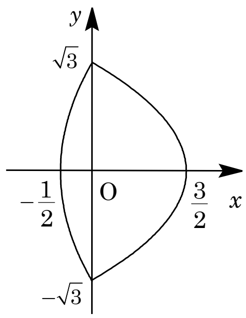
微分と積分の基本的な計算問題です。

4

問題のページへ

(1) 点$(1,\ 0)$までの距離とy軸までの距離の和が2である点$\mathrm{P}(x,\ y)$は,

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}+|x|=2,\ \sqrt{(x-1)^2+y^2}=2-|x|$$



ここで，$|x|\leqq 2$のもとで，両辺を2乗すると，

$$(x-1)^2+y^2=4-4|x|+x^2,\ y^2=-4|x|+2x+3$$

(i) $0\leqq x\leqq 2$のとき

$$y^2=-2x+3,\ x=-\frac{1}{2}y^2+\frac{3}{2}\cdots\cdots\cdots①$$

(ii) $-2\leqq x<0$のとき

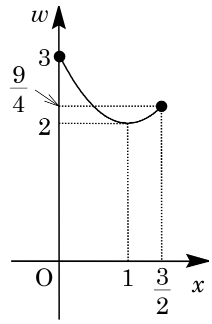
$$y^2=6x+3,\ x=\frac{1}{6}y^2-\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots②$$

これより，点Pの軌跡Cで囲まれた部分の面積Sは,

$$S=2\int_0^{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2}y^2+\frac{3}{2}-\frac{1}{6}y^2+\frac{1}{2}\right)dy=2\int_0^{\sqrt{3}}\left(-\frac{2}{3}y^2+2\right)dy$$
$$=2\left[-\frac{2}{9}y^3+2y\right]_0^{\sqrt{3}}=-\frac{4}{3}\sqrt{3}+4\sqrt{3}=\frac{8}{3}\sqrt{3}$$

(2) 円$x^2+y^2=a\cdots\cdots③$とCの交点の個数は,

(i) $0\leqq x\leqq\frac{3}{2}$のとき　①③を連立して,

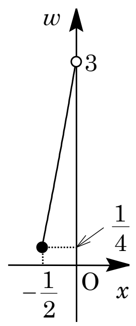


$$x^2-2x+3=a,\ (x-1)^2+2=a\cdots\cdots\cdots④$$

$w=(x-1)^2+2$のグラフは右図のようになり，$w=a$との交点のx座標が④の解となる。さらに，④の異なる解の個数と円③とCの交点の個数は，$x=\frac{3}{2}$のとき1対1，$0\leqq x<\frac{3}{2}$のとき1対2と対応する。

よって，円③とCの交点の個数は，$0<a<2$のとき0個，$a=2$のとき2個，$2<a<\frac{9}{4}$のとき4個，$a=\frac{9}{4}$のとき3個，$\frac{9}{4}<a\leqq 3$のとき2個，$3<a$のとき0個である。

(ii) $-\frac{1}{2}\leqq x<0$のとき　②③を連立して,



$$x^2+6x+3=a,\ (x+3)^2-6=a\cdots\cdots\cdots⑤$$

$w=(x+3)^2-6$のグラフは右図のようになり，$w=a$との交点のx座標が⑤の解となる。さらに，⑤の異なる解の個数と円③とCの交点の個数は，$x=-\frac{1}{2}$のとき1対1，$-\frac{1}{2}<x<0$のとき1対2と対応する。

よって，円③とCの交点の個数は，$0<a<\frac{1}{4}$のとき0個，$a=\frac{1}{4}$のとき1個,

$\frac{1}{4}<a<3$のとき 2 個，$3\leqq a$ のとき 0 個である。

(i)(ii)より，円③と C の交点の個数をまとめると，$0<a<\frac{1}{4}$ または$3<a$のとき 0 個，$a=\frac{1}{4}$ のとき 1 個，$\frac{1}{4}<a<2$ または$a=3$のとき 2 個，$a=2$または$\frac{9}{4}<a<3$のとき 4 個，$a=\frac{9}{4}$ のとき 5 個，$2<a<\frac{9}{4}$ のとき 6 個である。

［解 説］

後半は，第 2 問と同じく，煩雑な問題です。難問というわけではないのですが。なお，接点も交点に含まれるという立場で，解答例を記しています。