$\boxed{1}$

解答解説のページへ

空間内の 1 辺の長さ 1 の正四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とし, OA の中点を P とする。以下の問いに答えよ。

(1) $0<t<1$ に対し, BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。また，PM＋MQ が最小になる OB 上の点を M とし，PN＋NQ が最小となる OC 上の点を N とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ を，それぞれ t，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) △QMN の面積を t を用いて表せ。

(3) t が $0<t<1$ の範囲を動くとき，△QMN の面積の最大値を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

a を正の定数とする。条件 $\cos\theta-\sin\theta=a\sin\theta\cos\theta$，$0<\theta<\pi$ を満たす θ について，以下の問いに答えよ。

(1) 条件を満たす θ は，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で，ただ 1 つ存在することを示せ。

(2) 条件を満たす θ の個数を求めよ。

3

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1)　正の実数 a, b, c について，不等式 $\dfrac{\log a}{a}+\dfrac{\log b}{b}+\dfrac{\log c}{c}<\log 4$ が成立することを示せ。ただし，$\log$ は自然対数とし，必要なら $e>2.7$ および $\log 2>0.6$ を用いてもよい。

(2)　自然数 a, b, c, d の組で，$a^{bc}b^{ca}c^{ab}=d^{abc}$，$a\leqq b\leqq c$，$d\geqq 3$ を満たすものをすべて求めよ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

a を $a>2$ である実数とする。xy 平面上の曲線 $C: y=\dfrac{1}{\sin x\cos x}$ $\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ と直線 $y=a$ の交点の x 座標を α，$\beta\ (\alpha<\beta)$ とする。以下の問いに答えよ。

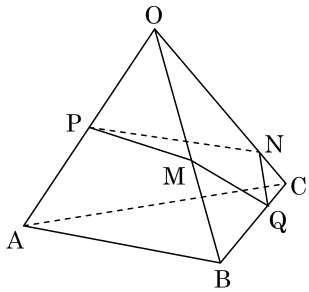
(1)　$\tan\alpha$ および $\tan\beta$ を a を用いて表せ。

(2)　C と x 軸, および 2 直線 $x=\alpha$，$x=\beta$ で囲まれた領域を S とする。S の面積を a を用いて表せ。

(3)　S を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積 V を a を用いて表せ。

$\boxed{1}$

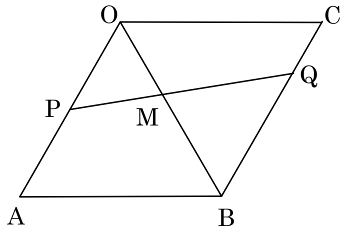
問題のページへ



(1) 折れ線の長さ $\mathrm{PM}+\mathrm{MQ}$ が最小になる OB 上の点 M は，右下図の正四面体 OABC の展開図において，辺 OB と PQ の交点である。

すると，$\mathrm{OM}:\mathrm{MB}=\dfrac{1}{2}:t=1:2t$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2t+1}\vec{b}$$



また，$\mathrm{PN}+\mathrm{NQ}$ が最小となる OC 上の点 N に対して，同様に考えると，$\mathrm{ON}:\mathrm{NC}=\dfrac{1}{2}:1-t=1:2-2t$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{1}{3-2t}\vec{c}$ である。

(2) まず，$\triangle\mathrm{OBC}=\dfrac{1}{2}\cdot1^2\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ から，

$$\triangle\mathrm{OMN}=\frac{1}{2t+1}\cdot\frac{1}{3-2t}\triangle\mathrm{OBC}=\frac{1}{(2t+1)(3-2t)}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\triangle\mathrm{BQM}=\frac{2t}{2t+1}\cdot\frac{t}{1}\triangle\mathrm{OBC}=\frac{2t^2}{2t+1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\triangle\mathrm{CQN}=\frac{2-2t}{3-2t}\cdot\frac{1-t}{1}\triangle\mathrm{OBC}=\frac{(2-2t)(1-t)}{3-2t}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$$

よって，$\triangle\mathrm{QMN}$ の面積を S とおくと，

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{1-\frac{1}{(2t+1)(3-2t)}-\frac{2t^2}{2t+1}-\frac{(2-2t)(1-t)}{3-2t}\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{-4t^2+4t}{(2t+1)(3-2t)}=\frac{\sqrt{3}t(1-t)}{(2t+1)(3-2t)}$$

(3) (2)より，$S=\dfrac{\sqrt{3}t(1-t)}{-4t^2+4t+3}=\dfrac{\sqrt{3}t(1-t)}{4t(1-t)+3}$ となり，$u=t(1-t)=-\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$ とおくと，$0<t<1$ から，$0<u\leqq\dfrac{1}{4}$ となり，

$$S=\frac{\sqrt{3}u}{4u+3}=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1-\frac{3}{4u+3}\right)$$

よって，$u=\dfrac{1}{4}\ \left(t=\dfrac{1}{2}\right)$ のとき，S は最大値 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{16}$ をとる。

［解 説］

(3)は，普通に微分法を利用するという方法もありますが，分母・分子の形に注目して置き換えをしています。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　$\cos\theta-\sin\theta=a\sin\theta\cos\theta\ \ (a>0)\cdots\cdots(*)$に対して，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$のとき，

$$a=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta}-\frac{1}{\cos\theta}$$

ここで，$f(\theta)=\dfrac{1}{\sin\theta}-\dfrac{1}{\cos\theta}$ とおくと，$f'(\theta)=-\dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}+\dfrac{-\sin\theta}{\cos^2\theta}<0$

これより，$f(\theta)$ は単調減少し，$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(\theta)=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}f(\theta)=-\infty$ より，

$a=f(\theta)$ すなわち$(*)$を満たすθは，ただ 1 つ存在する。

(2)　まず，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$のとき$(*)$は成立しない。次に，$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$において，

$$\begin{aligned}f'(\theta)&=-\frac{\sin^3\theta+\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}\\&=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta\cos\theta-1)}{\sin^2\theta\cos^2\theta}\\&=\frac{\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)(\sin2\theta-2)}{2\sin^2\theta\cos^2\theta}\end{aligned}$$

θ	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$		↘		↗	

また，$f\left(\dfrac{3}{4}\pi\right)=\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$，$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}f(\theta)=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\pi-0}f(\theta)=\infty$ である。

したがって，$0<\theta<\pi$における$(*)$を満たすθの個数は，(1)の結果も合わせると，$0<a<2\sqrt{2}$ のとき 1 個，$a=2\sqrt{2}$ のとき 2 個，$a>2\sqrt{2}$ のとき 3 個である。

［解　説］

定数を分離した後，その定数の値に応じた解の個数を，グラフをイメージしながら求めていくという微分の応用についての典型題です。

$\boxed{3}$

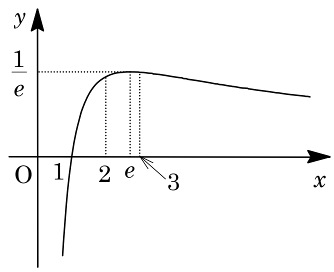
問題のページへ

(1)　まず，$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とおくと，

$$f'(x)=\frac{1-\log x}{x^2}$$

すると，$f(x)$ の増減は右表のようになり，グラフの概形は右下図である。

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$	0



これより，正の実数 a, b, c について，

$$\frac{\log a}{a}+\frac{\log b}{b}+\frac{\log c}{c}\leqq\frac{1}{e}+\frac{1}{e}+\frac{1}{e}=\frac{3}{e}$$

$$\log 4-\frac{3}{e}=\frac{2e\log 2-3}{e}>\frac{2\times 2.7\times 0.6-3}{e}>0$$

よって，$\dfrac{3}{e}<\log 4$ から，$\dfrac{\log a}{a}+\dfrac{\log b}{b}+\dfrac{\log c}{c}<\log 4$

(2)　$a^{bc}b^{ca}c^{ab}=d^{abc}$　$(a\leqq b\leqq c$，$d\geqq 3)$に対して，$\log a^{bc}b^{ca}c^{ab}=\log d^{abc}$ から，

$$bc\log a+ca\log b+ab\log c=abc\log d\,,\ \ \frac{\log a}{a}+\frac{\log b}{b}+\frac{\log c}{c}=\log d$$

すると，(1)より $\log d<\log 4$ となり，d は 3 以上の整数より，$d=3$ である。

$$\frac{\log a}{a}+\frac{\log b}{b}+\frac{\log c}{c}=\log 3\quad (a\leqq b\leqq c)\cdots\cdots\cdots(*)$$

さて，$(*)$を満たす 1 組の整数解として，$(a,\ b,\ c)=(3,\ 3,\ 3)$ がある。

ここで，$f(3)-f(2)=\dfrac{\log 3}{3}-\dfrac{\log 2}{2}=\dfrac{\log 9-\log 8}{6}>0$ なので，

$$0=f(1)<f(2)<f(3)>f(4)>f(5)>\cdots\cdots$$

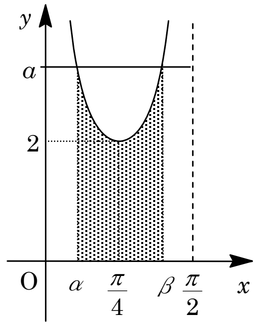
すると，$\dfrac{\log a}{a}+\dfrac{\log b}{b}+\dfrac{\log c}{c}\leqq f(3)+f(3)+f(3)=3\cdot\dfrac{\log 3}{3}=\log 3$ となり，等号が成立する，すなわち$(*)$を満たす整数解は，$(a,\ b,\ c)=(3,\ 3,\ 3)$ のみである。

［解　説］

(2)において，1 組の整数解はすぐに目視でわかりますので，それ以外には存在しないという形式で記しています。$f(x)$ のグラフが役に立ったわけです。

4

問題のページへ



(1)　$C : y = \dfrac{1}{\sin x\cos x}\left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ と $y = a$ を連立して,

$$a = \frac{1}{\sin x\cos x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x\cos x},\quad a = \tan x + \frac{1}{\tan x}$$

すると，$\tan^2 x - a\tan x + 1 = 0$ となり,

$$\tan x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$$

$\alpha < \beta$ から，$\tan\alpha = \dfrac{a - \sqrt{a^2-4}}{2}$，$\tan\beta = \dfrac{a + \sqrt{a^2-4}}{2}$

(2)　C と x 軸, および 2 直線 $x = \alpha$，$x = \beta$ で囲まれた領域 S の面積を T とすると,

$$T = \int_\alpha^\beta \left(\tan x + \frac{1}{\tan x}\right)dx = \int_\alpha^\beta \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right)dx$$

$$= \Big[-\log|\cos x| + \log|\sin x|\Big]_\alpha^\beta = \Big[\log|\tan x|\Big]_\alpha^\beta = \log\left|\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}\right|$$

$$= \log\left|\frac{a + \sqrt{a^2-4}}{a - \sqrt{a^2-4}}\right| = \log\frac{\left(a + \sqrt{a^2-4}\right)^2}{4} = 2\log\frac{a + \sqrt{a^2-4}}{2}$$

(3)　S を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積 V は,

$$V = \pi\int_\alpha^\beta \left(\tan x + \frac{1}{\tan x}\right)^2 dx = \pi\int_\alpha^\beta \left(\tan^2 x + 2 + \frac{1}{\tan^2 x}\right)dx$$

$$= \pi\int_\alpha^\beta \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 + 2 + \frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx = \pi\int_\alpha^\beta \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$$

$$= \pi\Big[\tan x - \frac{1}{\tan x}\Big]_\alpha^\beta = \pi(\tan\beta - \tan\alpha) - \pi\left(\frac{1}{\tan\beta} - \frac{1}{\tan\alpha}\right)$$

$$= \pi\sqrt{a^2-4} - \pi\left(\frac{2}{a + \sqrt{a^2-4}} - \frac{2}{a - \sqrt{a^2-4}}\right)$$

$$= \pi\sqrt{a^2-4} - \pi\frac{-4\sqrt{a^2-4}}{a^2 - (a^2-4)} = 2\pi\sqrt{a^2-4}$$

［解　説］

(1)のポイントとなっている式変形には，いろいろな方法がありますが，解答例では $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$ を利用しています。また，(2)と(3)は，三角関数の定積分の計算力が問われています。なお，C の概形については，$y = \dfrac{2}{\sin 2x}$ と変形して描いています。