1

解答解説のページへ

△ABC の 3 辺の長さを $\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{AC}=b$，$\mathrm{AB}=c$ とし，条件 $a+b+c=1$，$9ab=1$ が成り立つとする。以下の問いに答えよ。

(1) a の値の範囲を求めよ。

(2) $\theta=\angle\mathrm{C}$ とするとき，$\cos\theta$ の値の範囲を求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

$p,\ q,\ r$ を実数とする。空間内の 3 点 $\mathrm{A}(1,\ p,\ 0)$，$\mathrm{B}(q,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{C}(-1,\ -1,\ r)$ が一直線上にあるとき，以下の問いに答えよ。ただし，O を原点とする。

(1) p は 1 でも -1 でもないことを示せ。

(2) $q,\ r$ を p を用いて表せ。

(3) $p',\ q',\ r'$ を実数とし，空間内の 3 点を $\mathrm{A}'(1,\ p',\ 0)$，$\mathrm{B}'(q',\ 1,\ 1)$，$\mathrm{C}'(-1,\ -1,\ r')$ とする。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}'}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}'}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}'}$ がいずれもベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直であるとき，$p',\ q',\ r'$ を p を用いて表せ。

(4) (3)における 3 点 A'，B'，C' は一直線上にないことを示せ。

3

解答解説のページへ

a と b を正の実数とする。$\triangle$ABC において，$\angle$B と $\angle$C は鋭角とする。点 A を通り辺 BC に直交する直線を引き，辺 BC との交点を X_1 とし，線分 AX_1 の長さを 1 とする。また，$BX_1 = a$，$CX_1 = b$ とする。各 $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して以下の操作を行う。

辺 BC 上の点 X_n を通り辺 AC に平行な直線を引き，辺 AB との交点を Y_n とする。また，点 Y_n を通り辺 BC に平行な直線を引き，辺 AC との交点を Z_n とする。点 Z_n を通り辺 BC に直交する直線を引き，辺 BC との交点を X_{n+1} とする。

線分 Z_nX_{n+1} の長さを l_n とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) l_1 を a, b を用いて表せ。

(2) l_{n+1} を l_n，a，b を用いて表せ。

(3) $b = 8a$ のとき，$l_n > \dfrac{1}{2}$ となる最小の奇数 n を求めよ。必要ならば，$3.169 < \log_2 9 < 3.17$ を用いてよい。

4

解答解説のページへ

r を正の実数とする。数列$\{a_n\}$を $a_n=\int_0^{n\pi}e^{-rx}|\sin x|\,dx$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$と定めるとき，以下の問いに答えよ。

(1) $a_{n+1}-a_n$ を求めよ。

(2) $\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(3) $\lim_{n\to\infty}a_n$ を r を用いて表せ。

(4) (3)で求めた r の式を $f(r)$ とおく。$\lim_{r\to+0}rf(r)$ を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　△ABC の 3 辺の長さ a, b, c について，$a>0$，$b>0$，$c>0$ ………①

$a<b+c$，$b<c+a$，$c<a+b$ ………②

条件より，$a+b+c=1$ ……③，$9ab=1$ ……④

③から $c=1-a-b$ となり，①に代入すると，$1-a-b>0$，$a+b<1$ ………⑤

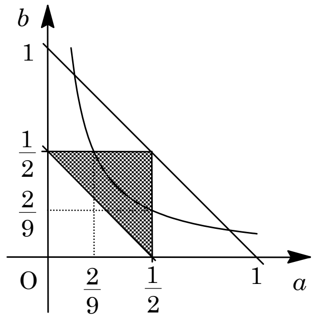
また，②に代入すると，$a<1-a$，$b<1-b$，$1-a-b<a+b$ となり，

$a<\dfrac{1}{2}$，$b<\dfrac{1}{2}$，$a+b>\dfrac{1}{2}$ ………⑥

よって，①②③をまとめると，⑤⑥から，

$0<a<\dfrac{1}{2}$，$0<b<\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{2}<a+b<1$

これを ab 平面上に図示すると右図の網点部となる。



そして，④から $b=\dfrac{1}{9a}$ となり，この領域内で a のとり得る範囲を調べると，$\dfrac{2}{9}<a<\dfrac{1}{2}$ である。

(2)　$\angle C=\theta$ とおき，△ABC に余弦定理を適用すると，③④から，

$$\cos\theta=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+b^2-(1-a-b)^2}{2\cdot\frac{1}{9}}=\frac{9}{2}(-1-2ab+2a+2b)$$

$$=\frac{9}{2}\left(-1-\frac{2}{9}+2a+\frac{2}{9a}\right)=9a+\frac{1}{a}-\frac{11}{2}$$

ここで，$f(a)=9a+\dfrac{1}{a}-\dfrac{11}{2}$ とおくと，$\cos\theta=f(a)$ となり，

$$f'(a)=9-\frac{1}{a^2}=\frac{9a^2-1}{a^2}$$

すると，$\dfrac{2}{9}<a<\dfrac{1}{2}$ における $f(a)$ の増減は右表のようになり，$\cos\theta$ のとり得る範囲は，

a	$\frac{2}{9}$	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$	1	↘	$\frac{1}{2}$	↗	1

$\dfrac{1}{2}\leqq\cos\theta<1$

［解 説］

三角形を題材とした図形の計量問題です。そこに，微分と増減の内容が加えられています。(1)は不等式の処理ですが，式変形だけではややこしそうだったので，図を用いています。

$\boxed{2}$ 問題のページへ

(1)　$\mathrm{A}(1,\ p,\ 0)$，$\mathrm{B}(q,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{C}(-1,\ -1,\ r)$に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(q-1,\ 1-p,\ 1),\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2,\ -1-p,\ r)$$

A, B, C が一直線上にあることより，k を 0 でない実数として，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$$-2=k(q-1)\cdots\cdots\cdots①,\ -1-p=k(1-p)\cdots\cdots\cdots②,\ r=k\cdots\cdots\cdots③$$

$p=1$ のとき，②は $0\cdot k=-2$ となり実数 k は存在しない。また，$p=-1$ のとき，②は $2k=0$ となり $k\neq 0$ に反する。よって，$p\neq\pm 1$ である。

(2)　②より，$k=\dfrac{p+1}{p-1}$ となり，③から，$r=\dfrac{p+1}{p-1}$

また，①から $-2=\dfrac{p+1}{p-1}(q-1)$ となり，$q=1+\dfrac{-2(p-1)}{p+1}=\dfrac{-p+3}{p+1}\cdots\cdots\cdots④$

(3)　(2)より，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left(\dfrac{-2(p-1)}{p+1},\ 1-p,\ 1\right)=\dfrac{1}{p+1}(-2p+2,\ -p^2+1,\ p+1)$

ここで，$\mathrm{A}'(1,\ p',\ 0)$に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直なので，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ から，

$$-2p+2-(p^2-1)p'=0,\ -2-(p+1)p'=0,\ p'=\frac{-2}{p+1}\cdots\cdots\cdots⑤$$

また，$\mathrm{B}'(q',\ 1,\ 1)$に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直なので，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ から，

$$(-2p+2)q'-(p^2-1)+p+1=0,\ -2(p-1)q'-(p^2-p-2)=0$$

よって，$q'=\dfrac{p^2-p-2}{-2(p-1)}=-\dfrac{(p+1)(p-2)}{2(p-1)}\cdots\cdots\cdots⑥$

さらに，$\mathrm{C}'(-1,\ -1,\ r')$に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OC'}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直なので，$\overrightarrow{\mathrm{OC'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ から，

$$2p-2+p^2-1+(p+1)r'=0,\ (p+1)r'+(p^2+2p-3)=0$$

よって，$r'=-\dfrac{p^2+2p-3}{p+1}=-\dfrac{(p-1)(p+3)}{p+1}$

(4)　A'，B'，C' が一直線上と仮定すると，④より $q'=\dfrac{-p'+3}{p'+1}$ となり，⑤⑥から，

$$-\frac{(p+1)(p-2)}{2(p-1)}=\frac{\dfrac{2}{p+1}+3}{\dfrac{-2}{p+1}+1},\ -\frac{(p+1)(p-2)}{2(p-1)}=\frac{3p+5}{p-1}$$

まとめると，$-(p+1)(p-2)=2(3p+5)$ から，$p^2+5p+8=0\cdots\cdots\cdots⑦$

すると，⑦の判別式 $D=5^2-4\cdot 8<0$ から実数 p は存在しない。

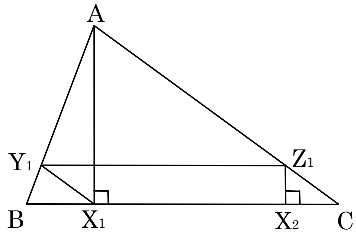
よって，A'，B'，C' は一直線上にない。

［解　説］

空間ベクトルの成分に関する問題ですが，図形的な意味を考えず，数式の計算だけで押し通した解答例です。

$\boxed{3}$

問題のページへ

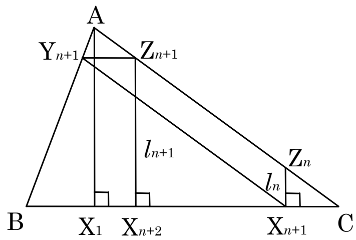


(1)　条件より，$AX_1 = 1$，$BX_1 = a$，$CX_1 = b$

そして，$X_1Y_1 /\!/ AC$，$Y_1Z_1 /\!/ BC$ より，

$$CZ_1 : Z_1A = BY_1 : Y_1A = BX_1 : X_1C = a : b$$

よって，$l_1 = Z_1X_2 = \dfrac{a}{a+b}AX_1 = \dfrac{a}{a+b}$



(2)　$Z_nX_{n+1} = l_n$，$Z_{n+1}X_{n+2} = l_{n+1}$ について，(1)と同様に考えると，

$$CZ_{n+1} : Z_{n+1}A = BY_{n+1} : Y_{n+1}A$$
$$= BX_{n+1} : X_{n+1}C \cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，$CX_{n+1} : CX_1 = l_n : 1$ より，

$$CX_{n+1} = bl_n$$

すると，$BX_{n+1} : X_{n+1}C = (a+b-bl_n) : bl_n \cdots\cdots\cdots ②$

①②より，$CZ_{n+1} : Z_{n+1}A = (a+b-bl_n) : bl_n$ となり，

$$l_{n+1} = \frac{a+b-bl_n}{(a+b-bl_n)+bl_n}AX_1 = \frac{a+b-bl_n}{a+b} = -\frac{b}{a+b}l_n + 1$$

(3)　$b = 8a$ のとき，(1)(2)より，$l_1 = \dfrac{1}{9}$，$l_{n+1} = -\dfrac{8}{9}l_n + 1$ となり，

$$l_{n+1} - \frac{9}{17} = -\frac{8}{9}\left(l_n - \frac{9}{17}\right)$$

すると，$l_n - \dfrac{9}{17} = \left(l_1 - \dfrac{9}{17}\right)\left(-\dfrac{8}{9}\right)^{n-1} = -\dfrac{64}{17\cdot 9}\left(-\dfrac{8}{9}\right)^{n-1} = \dfrac{8}{17}\left(-\dfrac{8}{9}\right)^n$ となり，

$$l_n = \frac{8}{17}\left(-\frac{8}{9}\right)^n + \frac{9}{17}$$

条件より，奇数 n は k を自然数として，$n = 2k-1$ とおくと，$l_n > \dfrac{1}{2}$ から，

$$\frac{8}{17}\left(-\frac{8}{9}\right)^{2k-1} + \frac{9}{17} > \frac{1}{2},\ \frac{8}{17}\left(-\frac{9}{8}\right)\left(-\frac{8}{9}\right)^{2k} > -\frac{1}{2\cdot 17},\ \left(\frac{8}{9}\right)^{2k} < \frac{1}{18}$$

両辺に底 2 で対数をとると，$2k(\log_2 2^3 - \log_2 3^2) < -\log_2 2\cdot 3^2$ となり，

$$2k(2\log_2 3 - 3) > 1 + 2\log_2 3,\ k > \frac{1+\log_2 9}{2(\log_2 9 - 3)} = \frac{1}{2} + \frac{4}{2(\log_2 9 - 3)}$$

ここで，$3.169 < \log_2 9 < 3.17$ から，$12.2 < \dfrac{1}{2} + \dfrac{4}{2(\log_2 9 - 3)} < 12.4$

よって，$k \geqq 13$ となり，求める最小の奇数 n は，$2\cdot 13 - 1 = 25$ となる。

［解　説］

漸化式の図形への応用です。平行線を利用した頻出の内容になっていますが，最後の詰めの計算は面倒です。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　$a_n=\int_0^{n\pi}e^{-rx}\left|\sin x\right|dx$ に対し，$n\pi\leqq x\leqq(n+1)\pi$ で $\sin x$ の符号は不変なので，

$$a_{n+1}-a_n=\int_0^{(n+1)\pi}e^{-rx}\left|\sin x\right|dx-\int_0^{n\pi}e^{-rx}\left|\sin x\right|dx$$
$$=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-rx}\left|\sin x\right|dx=\left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-rx}\sin x\,dx\right|$$

ここで，$(e^{-rx}\sin x)'=-re^{-rx}\sin x+e^{-rx}\cos x$ ………①

$(e^{-rx}\cos x)'=-re^{-rx}\cos x-e^{-rx}\sin x$ ………②

①×r＋②より，$-(r^2+1)e^{-rx}\sin x=\left\{e^{-rx}(r\sin x+\cos x)\right\}'$ となり，

$$a_{n+1}-a_n=\left|-\frac{1}{r^2+1}\Big[e^{-rx}(r\sin x+\cos x)\Big]_{n\pi}^{(n+1)\pi}\right|$$
$$=\frac{1}{r^2+1}\left|e^{-(n+1)\pi r}\cos(n+1)\pi-e^{-n\pi r}\cos n\pi\right|$$
$$=\frac{1}{r^2+1}\left|e^{-n\pi r}e^{-\pi r}(-1)^{n+1}-e^{-n\pi r}(-1)^n\right|$$
$$=\frac{e^{-n\pi r}\left|(-1)^n\right|}{r^2+1}\left|-e^{-\pi r}-1\right|=\frac{e^{-\pi r}+1}{r^2+1}e^{-n\pi r}$$

(2)　(1)より，$a_1=\int_0^{\pi}e^{-rx}\left|\sin x\right|dx=\dfrac{e^{-\pi r}+1}{r^2+1}$ となり，$n\geqq 2$ で，

$$a_n=a_1+\frac{e^{-\pi r}+1}{r^2+1}\sum_{k=1}^{n-1}e^{-k\pi r}=\frac{e^{-\pi r}+1}{r^2+1}\left\{1+\frac{e^{-\pi r}(1-e^{-(n-1)\pi r})}{1-e^{-\pi r}}\right\}$$
$$=\frac{(1+e^{-\pi r})(1-e^{-n\pi r})}{(r^2+1)(1-e^{-\pi r})}$$

なお，この式は $n=1$ のときも成立している。

(3)　$r>0$ から，$n\to\infty$ のとき $e^{-n\pi r}\to 0$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1+e^{-\pi r}}{(r^2+1)(1-e^{-\pi r})}$

(4)　$f(r)=\dfrac{1+e^{-\pi r}}{(r^2+1)(1-e^{-\pi r})}$ より，$rf(r)=\dfrac{1+e^{-\pi r}}{r^2+1}\cdot\dfrac{r}{1-e^{-\pi r}}$

ここで，$g(r)=e^{-\pi r}$ とおくと，$g'(r)=-\pi e^{-\pi r}$ となり，

$$\lim_{r\to+0}\frac{1-e^{-\pi r}}{r}=-\lim_{r\to+0}\frac{g(r)-g(0)}{r}=-g'(0)=\pi$$

よって，$\displaystyle\lim_{r\to+0}rf(r)=\frac{1+1}{1}\cdot\frac{1}{\pi}=\frac{2}{\pi}$ である。

［解　説］

定積分と数列を融合した超頻出の有名問題です。このタイプの部分積分は計算ミスを犯しやすいので，いつも①②のような式を先に立式しています。