1　　解答解説のページへ

　$\triangle$ABC と, A を通り BC に平行な直線 l を考える。k を正の数とし，直線 l 上に点 P を $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ となるようにとる。また直線 l 上に点 Q を，線分 PB と線分 QC が 1 点で交わるようにとる。その交点を R とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とおき，また m を $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=m\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ により定める。以下の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，k，m を用いて表せ。

(2)　$|\vec{b}|=1$，$|\vec{c}|=2$，$\cos\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{3}{4}$，$m=-1$ とする。$\overrightarrow{\mathrm{BR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CR}}$ が直交するとき，k の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

$x \geqq 1$ で定義された関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x^2}$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　$x \geqq 1$ における $f(x)$ の最大値とそのときの x の値を求めよ。

(2)　(1)で求めた x の値を a とする。曲線 $y=f(x)$ と 2 直線 $y=0$，$x=a$ で囲まれた図形を D とする。D の面積を求めよ。

(3)　(2)の図形 D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす θ に対して，$\alpha=2(\cos\theta+i\sin\theta)$ とする。ただし，i は虚数単位である。$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$z_n=\alpha^n-2\alpha^{n-1}$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ とするとき，z_n を極形式で表せ。

(2)　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ とするとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|z_k|>500$ となる最小の n を求めよ。

(3)　z_{1000} が実数となるような θ の値の個数を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

a, b を実数とし，曲線 $C: y = x^3 - 3ax^2 + bx$ を考える。C の接線の傾きの最小値が -3 であるとき，以下の問いに答えよ。

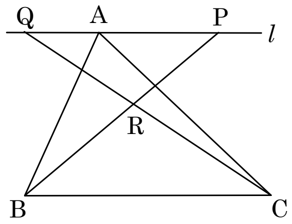
(1) b を a を用いて表せ。

(2) C が x 軸の正の部分，負の部分とそれぞれ 1 点で交わるとする。このとき a の値の範囲を求めよ。

(3) a が(2)で求めた範囲にあるとき，C と x 軸で囲まれた図形の面積の最小値を求め，そのときの a の値を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　$\triangle$ABC において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とする。

そして，l 上に点 P, Q を $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{BC}}=k(\vec{c}-\vec{b})\ (k>0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=m\overrightarrow{\mathrm{AP}}=km(\vec{c}-\vec{b})$ で定めると，線分 PB と線分 QC が 1 点で交わることより $m\leqq 1$ となり，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{QP}}\right|=\left|(k-km)(\vec{c}-\vec{b})\right|=k(1-m)\left|\vec{c}-\vec{b}\right|$$

ここで，QP // BC なので，

$$\mathrm{BR}:\mathrm{RP}=\mathrm{BC}:\mathrm{QP}=\left|\vec{c}-\vec{b}\right|:k(1-m)\left|\vec{c}-\vec{b}\right|=1:k-km$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\dfrac{k-km}{1+k-km}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{1+k-km}\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{k-km}{1+k-km}\vec{b}+\frac{1}{1+k-km}k(\vec{c}-\vec{b})=\frac{-km}{1+k-km}\vec{b}+\frac{k}{1+k-km}\vec{c}$$

(2)　$m=-1$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-k(\vec{c}-\vec{b})-\vec{c}=k\vec{b}-(k+1)\vec{c}$

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=k(\vec{c}-\vec{b})-\vec{b}=-(k+1)\vec{b}+k\vec{c}$$

さて，$\left|\vec{b}\right|=1$，$\left|\vec{c}\right|=2$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=1\cdot 2\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{2}$ で，$\overrightarrow{\mathrm{BR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CR}}$ が直交するので，

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=0,\ -k(k+1)\cdot 1^2+\{k^2+(k+1)^2\}\cdot\frac{3}{2}-k(k+1)\cdot 2^2=0$$

まとめると，$4k^2+4k-3=0$，$(2k+3)(2k-1)=0$

よって，$k>0$ から，$k=\dfrac{1}{2}$

［解　説］

平面ベクトルの図形への応用問題です。(1)は，普通に内分比を設定し，分点ベクトルで処理してもよいのですが，記述量が多くなります。また，(2)は，解答例のように(1)の結果を無視しています。

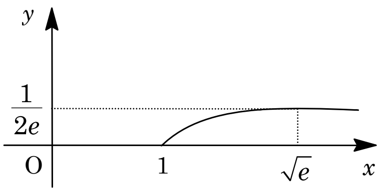
$\boxed{2}$ 問題のページへ

(1)　$x \geqq 1$ のとき，$f(x) = \dfrac{\log x}{x^2}$ に対して，$f'(x) = \dfrac{x^{-1}x^2 - 2x\log x}{x^4} = \dfrac{1-2\log x}{x^3}$

すると，$f'(x) = 0$ の解は $x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$ であるので，$f(x)$ は増減が右表のようになり，$x = \sqrt{e}$ のとき最大値 $\dfrac{1}{2e}$ をとる。

x	1	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2e}$	$\searrow$

(2)　曲線 $y = f(x)$ と 2 直線 $y = 0$，$x = \sqrt{e}$ で囲まれた図形 D の面積を S とおくと，



$$S = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\log x}{x^2}dx$$

ここで，$t = \log x$ とおくと，$dt = \dfrac{1}{x}dx$ となり，

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}} te^{-t}dt = -\Big[te^{-t}\Big]_0^{\frac{1}{2}} + \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-t}dt = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}} - \Big[e^{-t}\Big]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}} + 1 = -\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}} + 1 = -\frac{3}{2\sqrt{e}} + 1$$

(3)　図形 D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V は,

$$V = \int_1^{\sqrt{e}} 2\pi x\cdot\frac{\log x}{x^2}dx = 2\pi\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\log x}{x}dx = 2\pi\Big[\frac{1}{2}(\log x)^2\Big]_1^{\sqrt{e}} = \pi\Big(\frac{1}{2}\Big)^2 = \frac{\pi}{4}$$

［解　説］

面積および体積に関する計算問題です。被積分関数は頻出タイプです。なお, (3)の解答例は円筒分割によるものです。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1)　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ で，$\alpha=2(\cos\theta+i\sin\theta)$ に対し，$z_n=\alpha^n-2\alpha^{n-1}=\alpha^{n-1}(\alpha-2)$

さて，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，$\alpha=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ より，

$$\alpha^{n-1}=2^{n-1}\left(\cos\frac{n-1}{3}\pi+i\sin\frac{n-1}{3}\pi\right)$$

また，$\alpha=1+\sqrt{3}i$ から，$\alpha-2=-1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi\right)$ となり，

$$\begin{aligned}z_n&=2^{n-1}\left(\cos\frac{n-1}{3}\pi+i\sin\frac{n-1}{3}\pi\right)\cdot 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)\\&=2^n\left\{\cos\left(\frac{n-1}{3}\pi+\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\frac{n-1}{3}\pi+\frac{2}{3}\pi\right)\right\}\\&=2^n\left(\cos\frac{n+1}{3}\pi+i\sin\frac{n+1}{3}\pi\right)\end{aligned}$$

(2)　(1)から $|z_n|=2^n$ なので，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|z_k|=\sum_{k=1}^{n}2^k=\frac{2(2^n-1)}{2-1}=2^{n+1}-2$ となり，

$$2^{n+1}-2>500\,,\ \ 2^{n+1}>502\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$2^8=256$，$2^9=512$ より，①を満たす最小の n は 8 である。

(3)　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$z_{1000}=\alpha^{1000}-2\alpha^{999}$ は，

$$z_{1000}=2^{1000}(\cos1000\theta+i\sin1000\theta)-2^{1000}(\cos999\theta+i\sin999\theta)$$

z_{1000} が実数となることより，$\sin1000\theta-\sin999\theta=0$ から，

$$2\cos\frac{1999}{2}\theta\sin\frac{\theta}{2}=0\cdots\cdots\cdots②$$

$\sin\dfrac{\theta}{2}>0$ から，②は $\cos\dfrac{1999}{2}\theta=0$ となり，l を整数として，$\dfrac{1999}{2}\theta=l\pi+\dfrac{\pi}{2}$

ここで，$0<\dfrac{1999}{2}\theta<\dfrac{1999}{4}\pi$ から，$0<l\pi+\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{1999}{4}\pi$

$$0<l+\frac{1}{2}<\frac{1999}{4}\,,\ \ -\frac{1}{2}<l<\frac{1997}{4}=499+\frac{1}{4}$$

よって，$l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 499$ となり，②を満たす θ の値の個数は 500 である。

［解　説］

複素数の極形式に関する基本的な問題です。

$\boxed{4}$

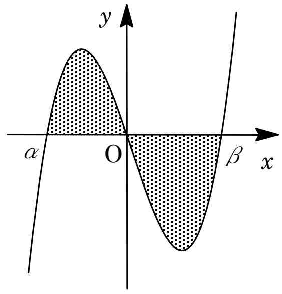
問題のページへ

(1)　$C: y = x^3 - 3ax^2 + bx$ に対して，$y' = 3x^2 - 6ax + b = 3(x-a)^2 - 3a^2 + b$

ここで，C の接線の傾きの最小値が -3 なので，

$$-3a^2 + b = -3\,,\ \ b = 3a^2 - 3 \cdots\cdots\cdots ①$$

(2)　$C: y = x(x^2 - 3ax + b)$ が，x 軸の正の部分，負の部分とそれぞれ 1 点で交わるので，方程式 $x^2 - 3ax + b = 0 \cdots\cdots ②$ は正の解と負の解を 1 つずつもつ。



この解を $x = \alpha,\ \beta\ (\alpha < 0 < \beta)$ とおくと，条件は $\alpha\beta < 0$ すなわち $b < 0$ となり，①より，

$$3a^2 - 3 < 0\,,\ (a+1)(a-1) < 0\,,\ -1 < a < 1$$

(3)　C と x 軸で囲まれた図形の面積 S は，

$$S = \int_\alpha^0 (x^3 - 3ax^2 + bx)\,dx + \int_0^\beta -(x^3 - 3ax^2 + bx)\,dx$$

$$= \Big[\frac{x^4}{4} - ax^3 + \frac{b}{2}x^2\Big]_\alpha^0 - \Big[\frac{x^4}{4} - ax^3 + \frac{b}{2}x^2\Big]_0^\beta$$

$$= -\frac{\alpha^4}{4} + a\alpha^3 - \frac{b}{2}\alpha^2 - \frac{\beta^4}{4} + a\beta^3 - \frac{b}{2}\beta^2$$

$$= -\frac{1}{4}(\alpha^4 + \beta^4) + a(\alpha^3 + \beta^3) - \frac{b}{2}(\alpha^2 + \beta^2) \cdots\cdots\cdots ③$$

ここで，①②より，$\alpha + \beta = 3a$，$\alpha\beta = b = 3a^2 - 3$ であるので，

$$\alpha^2 + \beta^2 = (3a)^2 - 2(3a^2 - 3) = 3a^2 + 6$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (3a)^3 - 3(3a^2 - 3)\cdot 3a = 27a$$

$$\alpha^4 + \beta^4 = (3a^2 + 6)^2 - 2(3a^2 - 3)^2 = 9(-a^4 + 8a^2 + 2)$$

すると，③に代入して，

$$S = -\frac{9}{4}(-a^4 + 8a^2 + 2) + a\cdot 27a - \frac{3a^2 - 3}{2}(3a^2 + 6) = -\frac{9}{4}(a^4 - 2a^2 - 2)$$

$$= -\frac{9}{4}\{(a^2 - 1)^2 - 3\} = -\frac{9}{4}(a^2 - 1)^2 + \frac{27}{4}$$

よって，$-1 < a < 1$ より $0 \leqq a^2 < 1$ なので，$a^2 = 0$ すなわち $a = 0$ のとき，S は最小値 $\dfrac{9}{2}$ をとる。

［解 説］

3 次曲線を対象とした頻出題です。積分計算も，難しくはありません。