1

解答解説のページへ

半径 1 の円に外接する△ABC について，$\angle\mathrm{CAB}=2x$，$\angle\mathrm{ABC}=2y$，$\angle\mathrm{BCA}=2z$ とする。△ABC の面積を S とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) $S=\dfrac{1}{\tan x}+\dfrac{1}{\tan y}+\dfrac{1}{\tan z}$ が成り立つことを示せ。

(2) $z=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，S の最小値とそのときの x, y を求めよ。

2

解答解説のページへ

$s>0$，$t>0$ とする。複素数平面上の $\alpha=-i$，$\beta=2-2i$，$\gamma=s+ti$ を表す点をそれぞれ A, B, C とする。さらに，点 D を直線 AC に関して点 B と反対側にとり，△ACD が正三角形になるようにする。点 D の表す複素数を z とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) z を s, t を用いて表せ。

(2) α，β，γ が等式 $4(\beta-\alpha)^2+(\gamma-\alpha)^2-2(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)=0$ を満たすとき，γ と z をそれぞれ求めよ。

(3) (2)で求めた γ と z に対して，直線 AC と直線 BD の交点を F とし，$\angle\mathrm{DFC}=\theta$ とする。このとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

$f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x^2}\ (x>0)$ とする。座標平面上の曲線 $y=f(x)$ を C とし，点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))\ (t>0)$ における C の接線を l とする。以下の問いに答えよ。

(1) 接線 l と曲線 C が点 P 以外に共有点をもたないような t の最大値を求めよ。

(2) (1)で求めた t の値を a とする。実数 k に対し，直線 $l_k : y=k(x-a)+f(a)$ と曲線 C の共有点の個数を求めよ。

(3) (2)の直線 l_k と曲線 C の共有点が 2 個のとき，それら共有点の x 座標のうち小さい方の値が $\dfrac{1}{3}$ となるような k を求め，そのときの曲線 C と直線 l_k で囲まれた部分の面積を求めよ。

4

解答解説のページへ

n は 2 以上の自然数とする。1 から $2n$ までの自然数の順列 a_1，a_2，…，a_{2n} に対して，分数の和 $\dfrac{a_1}{a_{n+1}}+\dfrac{a_2}{a_{n+2}}+\cdots+\dfrac{a_n}{a_{2n}}$ ……(∗)を考える。1 から $2n$ までの自然数のすべての順列に対して(∗)がとり得る値の最大値を S_n とする。以下の問いに答えよ。

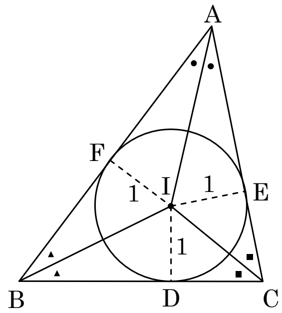
(1) S_2 を求めよ。

(2) S_n を与える順列 a_1，a_2，…，a_{2n} の例を 1 つ挙げ，その理由を述べよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n\log n}$ を求めよ。

$\boxed{1}$

問題のページへ



(1)　$\triangle$ABC の半径 1 の内接円と辺 BC, CA, AB との接点をそれぞれ D, E, F とおくと，$\angle \mathrm{CAB}=2x$，$\angle \mathrm{ABC}=2y$，$\angle \mathrm{BCA}=2z$ から，

$$\mathrm{AF}=\mathrm{AE}=\frac{1}{\tan x},\quad \mathrm{BD}=\mathrm{BF}=\frac{1}{\tan y}$$

$$\mathrm{CE}=\mathrm{CD}=\frac{1}{\tan z}$$

そこで，$\triangle$ABC の内心を I，その面積を S とすると，

$$\begin{aligned}S&=\triangle\mathrm{ABI}+\triangle\mathrm{BCI}+\triangle\mathrm{CAI}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tan x}+\frac{1}{\tan y}\right)\cdot 1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tan y}+\frac{1}{\tan z}\right)\cdot 1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tan z}+\frac{1}{\tan x}\right)\cdot 1\\&=\frac{1}{\tan x}+\frac{1}{\tan y}+\frac{1}{\tan z}\end{aligned}$$

(2)　$z=\frac{\pi}{6}$ のとき，$x+y=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$ となり，(1)より，

$$S=\frac{1}{\tan x}+\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}+\frac{1}{\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{\tan x}+\frac{1+\sqrt{3}\tan x}{\sqrt{3}-\tan x}+\sqrt{3}$$

ここで，$t=\tan x$ とおくと，$0<x<\frac{\pi}{3}$ から $0<t<\sqrt{3}$ となり，

$$S=\frac{1}{t}+\frac{1+\sqrt{3}t}{\sqrt{3}-t}+\sqrt{3}=\frac{1}{t}-\sqrt{3}+\frac{4}{\sqrt{3}-t}+\sqrt{3}=\frac{1}{t}+\frac{4}{\sqrt{3}-t}$$

$$\begin{aligned}S'&=-\frac{1}{t^2}+\frac{4}{(\sqrt{3}-t)^2}=\frac{3t^2+2\sqrt{3}t-3}{t^2(\sqrt{3}-t)^2}\\&=\frac{(3t-\sqrt{3})(t+\sqrt{3})}{t^2(\sqrt{3}-t)^2}\end{aligned}$$

t	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$
S'		$-$	0	$+$	
S		$\searrow$	$3\sqrt{3}$	$\nearrow$	

すると，S の増減は右表のようになり，$t=\frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき最小値 $3\sqrt{3}$ をとる。このとき，$\tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ から $x=\frac{\pi}{6}$ であり，$y=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$ となる。

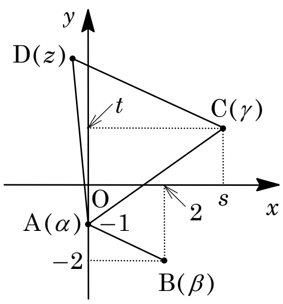
［解　説］

図形がらみの微分と増減に関する問題です。(2)では絶対不等式の利用も考えましたが，結局はオーソドックスな微分法ということに落ち着きました。

2

問題のページへ

(1)　$\alpha=-i$，$\beta=2-2i$，$\gamma=s+ti\ (s>0,\ t>0)$ に対し，複素数平面上に $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ をとる。



ここで，△ACD が正三角形で，点 D が直線 AC に関して B と反対側にあることより，$\mathrm{D}(z)$ は $\mathrm{C}(\gamma)$ を $\mathrm{A}(\alpha)$ のまわりに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点となり，

$$z-\alpha=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)(\gamma-\alpha)$$

$$z=-i+\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)\{s+(t+1)i\}=-i+\frac{1}{2}\{s-\sqrt{3}t-\sqrt{3}+(\sqrt{3}s+t+1)i\}$$

$$=\frac{1}{2}(s-\sqrt{3}t-\sqrt{3})+\frac{1}{2}(\sqrt{3}s+t-1)i\cdots\cdots\cdots(*)$$

(2)　与えられた条件 $4(\beta-\alpha)^2+(\gamma-\alpha)^2-2(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)=0$ より，

$$4+\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2-2\cdot\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=0\ ,\ \ \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=1\pm\sqrt{3}i$$

ここで，AC は AB を正の向きに回転したものなので，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=1+\sqrt{3}i$ となり，

$$\gamma=\alpha+(1+\sqrt{3}i)(\beta-\alpha)=-i+(1+\sqrt{3}i)(2-i)=2+\sqrt{3}+(-2+2\sqrt{3})i$$

すると，$s=2+\sqrt{3}$，$t=-2+2\sqrt{3}$ となるので，$(*)$から，

$$z=\frac{1}{2}(2+\sqrt{3}+2\sqrt{3}-6-\sqrt{3})+\frac{1}{2}(2\sqrt{3}+3-2+2\sqrt{3}-1)i$$

$$=-2+\sqrt{3}+2\sqrt{3}i$$

(3)　まず，xy 平面を対応させて，$\mathrm{A}(0,\ -1)$，$\mathrm{B}(2,\ -2)$，$\mathrm{C}(2+\sqrt{3},\ -2+2\sqrt{3})$，$\mathrm{D}(-2+\sqrt{3},\ 2\sqrt{3})$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(2+\sqrt{3},\ -1+2\sqrt{3}),\ \ \overrightarrow{\mathrm{BD}}=(-4+\sqrt{3},\ 2+2\sqrt{3})$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ のなす角が θ となり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2+(-1+2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{5}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|=\sqrt{(-4+\sqrt{3})^2+(2+2\sqrt{3})^2}=\sqrt{35}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=(2+\sqrt{3})(-4+\sqrt{3})+(-1+2\sqrt{3})(2+2\sqrt{3})=5$$

よって，$\cos\theta=\dfrac{5}{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{35}}=\dfrac{1}{2\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$ である。

［解 説］

複素数平面に関する標準的な問題です。(3)は慣れ親しんでいる xy 平面を対応させ，ベクトルの内積を利用しています。

３　問題のページへ

(1)　$f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x^2}=1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}\ (x>0)$に対し，$f'(x)=\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{4}{x^3}$

ここで，$C: y=f(x)$……①上の点$\mathrm{P}(t,\ f(t))$における接線lは，

$$y-\Big(1-\frac{3}{t}+\frac{2}{t^2}\Big)=\Big(\frac{3}{t^2}-\frac{4}{t^3}\Big)(x-t),\ \ y=\Big(\frac{3}{t^2}-\frac{4}{t^3}\Big)x+1-\frac{6}{t}+\frac{6}{t^2}\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②を連立すると，$1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}=\Big(\dfrac{3}{t^2}-\dfrac{4}{t^3}\Big)x+1-\dfrac{6}{t}+\dfrac{6}{t^2}$となり，

$$\Big(\frac{3}{t^2}-\frac{4}{t^3}\Big)x^3-\Big(\frac{6}{t}-\frac{6}{t^2}\Big)x^2+3x-2=0$$

左辺を因数分解して，$(x-t)^2\Big\{\Big(\dfrac{3}{t^2}-\dfrac{4}{t^3}\Big)x-\dfrac{2}{t^2}\Big\}=0$………③

すると，③が$x=t$以外に正の解をもたない条件は,

(i)　$\dfrac{3}{t^2}-\dfrac{4}{t^3}=0$のとき　$t=\dfrac{4}{3}$となり，③の解は$x=t$のみである。

(ii)　$\dfrac{3}{t^2}-\dfrac{4}{t^3}\neq 0$のとき　$t\neq\dfrac{4}{3}$となり，③の解は$x=t$または$x=\dfrac{2t}{3t-4}$である。

(ii-i)　$\dfrac{2t}{3t-4}=t$のとき　$t>0$から$t=2$となり，$t\neq\dfrac{4}{3}$を満たす。

(ii-ii)　$\dfrac{2t}{3t-4}\leqq 0$のとき　$t>0$より，$0<t<\dfrac{4}{3}$となる。

(i)(ii)より，③が$x=t$以外に正の解をもたない条件は，$0<t\leqq\dfrac{4}{3}$，$t=2$となる。

よって，lとCが点P以外に共有点をもたないtの最大値は$t=2$である。

(2)　(1)より$a=2$となり，$f(2)=0$から直線$l_k: y=k(x-2)$………④

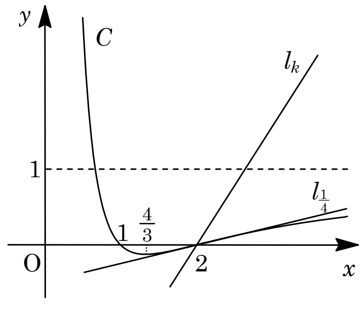
ここで，$f'(x)=\dfrac{3x-4}{x^3}$となり，

$$f''(x)=-\frac{6}{x^3}+\frac{12}{x^4}$$
$$=-\frac{6(x-2)}{x^4}$$

x	0	…	$\frac{4}{3}$	…	2	…
$f'(x)$	×	−	0	＋		＋
$f''(x)$	×	＋		＋	0	−
$f(x)$	×	↘	$-\frac{1}{8}$	↗	0	↗

すると，$f(x)$の増減および曲線$C: y=f(x)$の凹凸は右表のようになる。

さらに，$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=1$より，$C$の概形は右図のようになる。



よって，l_kとCの共有点の個数は，$f'(2)=\dfrac{1}{4}$に注意すると，$k\geqq\dfrac{1}{4}$のとき1個，$0<k<\dfrac{1}{4}$のとき3個，$k\leqq 0$のとき2個である。

(3)　l_kとCの共有点が2個のとき，(2)から$k\leqq 0$である。

そして，共有点の x 座標は①④を連立して，$\dfrac{(x-1)(x-2)}{x^2}=k(x-2)$ から，

$$(x-2)\left(\frac{x-1}{x^2}-k\right)=0 \cdots\cdots\cdots ⑤$$

⑤の $x\neq 2$ の解が $x=\dfrac{1}{3}$ なので，$k=-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{9}{1}=-6$ となり，$k\leqq 0$ を満たす。

このとき，C と l_k で囲まれた部分の面積 S は，

$$S=\int_{\frac{1}{3}}^{2}\left\{-6(x-2)-\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\right\}dx=\int_{\frac{1}{3}}^{2}\left(11-6x+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}\right)dx$$

$$=\left[11x-3x^2+3\log x+\frac{2}{x}\right]_{\frac{1}{3}}^{2}=11\cdot\frac{5}{3}-3\cdot\frac{35}{9}+3\log 6-2\cdot\frac{5}{2}=\frac{5}{3}+3\log 6$$

［解　説］

微積分の総合問題です。かなりの計算量があります。(1)の $t=2$ の場合は接線が C の変曲点を通る場合です。なお，(2)ではグラフ処理をして結論を導いていますが，方程式の解の個数を調べても構いません。

4　　問題のページへ

(1)　一般的に，$p_1>p_2>0$，$q_1>q_2>0$ のとき，

$$(p_1q_1+p_2q_2)-(p_1q_2+p_2q_1)=(p_1-p_2)(q_1-q_2)>0$$

よって，$p_1q_1+p_2q_2>p_1q_2+p_2q_1$ ………①

さて，$\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4\}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ より，$4>3>2>1$，$\frac{1}{1}>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}$

すると，$\frac{a_1}{a_3}+\frac{a_2}{a_4}=a_1\cdot\frac{1}{a_3}+a_2\cdot\frac{1}{a_4}$ のとり得る値の最大値 S_2 は，①より，

$$S_2=\frac{4}{1}+\frac{3}{2}=\frac{11}{2}$$

(2)　まず，$p_1>p_2>\cdots>p_n>0$，$q_1>q_2>\cdots>q_n>0$ とし，q_1，q_2，…，q_n を並べ替えた数列を x_1，x_2，…，x_n とおいたとき，$p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n$ の最大値が $p_1q_1+p_2q_2+\cdots+p_nq_n$ であることを示す。すなわち，

$$p_1q_1+p_2q_2+\cdots+p_nq_n\geqq p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n\ \cdots\cdots\cdots②$$

(i)　$(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)=(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_n)$ のとき　②の等号が成り立つ。

(ii)　$(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\neq(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_n)$ のとき

$x_i<x_j\ (1\leqq i<j\leqq n)$ となる x_i，x_j が存在し，この 2 数を交換すると，①より，

$$p_1x_1+\cdots+p_ix_j+\cdots+p_jx_i+\cdots+p_nx_n>p_1x_1+\cdots+p_ix_i+\cdots+p_jx_j+\cdots+p_nx_n$$

そして，$x_1>\cdots>x_j>\cdots>x_i>\cdots>x_n$ でなければ，$x_k<x_l\ (1\leqq k<l\leqq n)$ となる x_k，x_l が存在するので，この 2 数を交換するという操作をくり返していくと，

$$p_1q_1+p_2q_2+\cdots+p_nq_n>p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n$$

(i)(ii)より，不等式②は成立している。

さて，$\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{2n}\}=\{1,\ 2,\ \cdots,\ 2n\}$ より，

$$2n>2n-1>\cdots>n+1>n>\cdots>2>1$$
$$\frac{1}{1}>\frac{1}{2}>\cdots>\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}>\cdots>\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2n}$$

すると，$\frac{a_1}{a_{n+1}}+\frac{a_2}{a_{n+2}}+\cdots+\frac{a_n}{a_{2n}}$ のとり得る値の最大値 S_n は，②より，

$$S_n=\frac{2n}{1}+\frac{2n-1}{2}+\cdots+\frac{n+1}{n}\ \cdots\cdots\cdots③$$

このとき，a_1，a_2，…，a_{2n} の 1 例は，

$$(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ a_{n+1},\ a_{n+2},\ \cdots,\ a_{2n})=(2n,\ 2n-1,\ \cdots,\ n+1,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

(3)　③より，$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2n-(k-1)}{k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2n+1}{k}-1\right)=(2n+1)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-n$ ………④

ここで，k を自然数として，$k\leqq x\leqq k+1$ のとき $\frac{1}{k+1}\leqq\frac{1}{x}\leqq\frac{1}{k}$ が成り立ち，

$$\int_k^{k+1}\frac{1}{k+1}dx<\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx<\int_k^{k+1}\frac{1}{k}dx,\quad \frac{1}{k+1}<\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx<\frac{1}{k}\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

⑤より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}>\sum_{k=1}^{n}\int_{k}^{k+1}\frac{1}{x}dx=\int_{1}^{n+1}\frac{1}{x}dx=\Big[\log x\Big]_{1}^{n+1}=\log(n+1)$ ………⑥

また $n\geqq 2$ のとき，⑤より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}<\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k}^{k+1}\frac{1}{x}dx=\int_{1}^{n}\frac{1}{x}dx=\log n$ となり，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<1+\log n\ \cdots\cdots\cdots ⑦$$

⑥⑦より，$\displaystyle\log(n+1)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<1+\log n$ となり，④から，

$$(2n+1)\log(n+1)-n<S_n<(2n+1)(1+\log n)-n$$

$$\left(2+\frac{1}{n}\right)\frac{\log(n+1)}{\log n}-\frac{1}{\log n}<\frac{S_n}{n\log n}<\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{\log n}+1\right)-\frac{1}{\log n}\ \cdots\cdots\cdots ⑧$$

ここで，$n\to\infty$ のとき，$\displaystyle\frac{\log(n+1)}{\log n}-1=\frac{1}{\log n}\cdot\log\frac{n+1}{n}=\frac{1}{\log n}\cdot\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\to 0$

$$\frac{\log(n+1)}{\log n}\to 1\quad(n\to\infty)$$

以上より，⑧から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n\log n}=2\cdot 1-0=2$ となる。

［解　説］

数列と積分の融合問題ですが，ポイントはいわゆる「並べかえの不等式」です。これは，平たく言えば「積の和が最大になるのは大きいものどうしを掛けて足していったとき」ということだけですが。ただ，その記述方法は面倒です。また，(3)の⑥⑦式は，グラフを書いて面積を対応させた方がわかりやすいかもしれません。