1

解答解説のページへ

n 個の袋 A_1，A_2，$\cdots$，A_n がある。A_k $(1 \leqq k \leqq n)$ の中には白玉が k 個，黒玉が $n-k$ 個入っている。次の (操作) を考える。

(操作)

(操作 1)　n 個の袋から無作為に 1 つの袋を選び，それを A とおく。

(操作 2)　次の試行を s 回繰り返す。袋 A から無作為に玉を 1 個取り出し，玉の色を調べてから取り出した玉を袋 A に戻す。

以下の問いに答えよ。

(1)　$s=2$ とする。(操作) を行うとき，白玉がちょうど 1 回取り出される確率を n を用いて表せ。

(2)　$s=100$ とする。(操作 1) を行った結果，$A=A_k$ であった。このとき，(操作 2) で白玉がちょうど t 回取り出される条件付き確率を $p(t)$ とする。$n=3k$ が成り立つとき，$p(t)$ を最大にする t の値を求めよ。

(3)　$s=10$ とする。(操作) を行うとき，白玉がちょうど 3 回取り出される確率を q_n とする。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} q_n$ を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

$0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$ とする。AB $=1$，$\angle$BAC $=3\theta$ である△ABC について，辺 BC の中点を D としたとき，$\angle$BAD $=2\theta$ が成り立つとする。以下の問いに答えよ。

(1)　AC $=2\cos\theta$ であることを示せ。

(2)　BC を $\cos\theta$ を用いて表せ。

(3)　BC の最大値とそのときの θ の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

k を実数とし，$f(x)=\sin^2 x-\cos x-1+k$ とおく。曲線 $y=f(x)\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{3\pi}{2}\right)$ を C とする。以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 C と x 軸の共有点の個数が k の値によってどのように変わるか調べよ。

(2) 曲線 C と x 軸の共有点が 2 個以上あるような k に対し，$g(k)$ を，$g(k)=\displaystyle\int_{p_1}^{p_2} f(x)\sin x\,dx$ と定める。ただし，p_1，p_2 はそれぞれ，曲線 C と x 軸の共有点の x 座標の 1 番小さいもの，2 番目に小さいものとする。$g(k)$ の最大値と最小値を求めよ。

4

解答解説のページへ

m を自然数とする。以下の問いに答えよ。

(1) $k^2 - l^2 = 3^m$ を満たす自然数の組 $(k,\ l)$ の個数を m を用いて表せ。

(2) $\sqrt{x(x+3^m)}$ が整数となるような自然数 x で 3 の倍数でないものを m を用いて表せ。

(3) $\sqrt{x(x+3^m)}$ が整数となるような自然数 x の個数を m を用いて表せ。

1

問題のページへ

(1)　袋 A_k を選び，この袋から玉を 1 個取り出し，色を調べてから袋に戻す試行を 2 回繰り返したとき，白玉が 1 回，黒玉が 1 回取り出される確率は，

$$\frac{1}{n}\cdot{}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{k}{n}\right)\left(1-\frac{k}{n}\right)=\frac{2}{n^3}(nk-k^2)$$

すると，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ から，求める確率は，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n^3}(nk-k^2)=\frac{2}{n^3}\left\{n\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right\}$$

$$=\frac{n(n+1)}{3n^3}\{3n-(2n+1)\}=\frac{(n+1)(n-1)}{3n^2}$$

(2)　袋 A_k を選んだとき，試行を 100 回繰り返し，白玉が t 回，黒玉が $100-t$ 回取り出される条件付き確率 $p(t)$ は，$n=3k$ のとき，

$$p(t)={}_{100}\mathrm{C}_t\left(\frac{k}{3k}\right)^t\left(1-\frac{k}{3k}\right)^{100-t}={}_{100}\mathrm{C}_t\left(\frac{1}{3}\right)^t\left(\frac{2}{3}\right)^{100-t}=\frac{{}_{100}\mathrm{C}_t\cdot 2^{100-t}}{3^{100}}$$

これより，$p(t+1)=\dfrac{{}_{100}\mathrm{C}_{t+1}\cdot 2^{99-t}}{3^{100}}$ となり，

$$\frac{p(t+1)}{p(t)}=\frac{{}_{100}\mathrm{C}_{t+1}\cdot 2^{99-t}}{3^{100}}\cdot\frac{3^{100}}{{}_{100}\mathrm{C}_t\cdot 2^{100-t}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{100!}{(t+1)!\,(99-t)!}\cdot\frac{t!\,(100-t)!}{100!}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{100-t}{t+1}=\frac{100-t}{2(t+1)}$$

ここで，$\dfrac{100-t}{2(t+1)}>1$ とすると，$3t<98$ から $t<32+\dfrac{2}{3}$ となるので，

(i)　$t\leqq 32$ のとき　$\dfrac{p(t+1)}{p(t)}>1$ より，$p(t)<p(t+1)$

(ii)　$t\geqq 33$ のとき　$\dfrac{p(t+1)}{p(t)}<1$ より，$p(t)>p(t+1)$

(i)(ii)より，$p(0)<p(1)<\cdots<p(32)<p(33)>p(34)>\cdots>p(100)$

したがって，$p(t)$ を最大にする t は，$t=33$ である。

(3)　袋 A_k を選び，試行を 10 回繰り返したとき，白玉が 3 回，黒玉が 7 回取り出される確率は，$\dfrac{1}{n}\cdot{}_{10}\mathrm{C}_3\left(\dfrac{k}{n}\right)^3\left(1-\dfrac{k}{n}\right)^7=\dfrac{120}{n}\left(\dfrac{k}{n}\right)^3\left(1-\dfrac{k}{n}\right)^7$ より，題意の確率 q_n は，

$$q_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{120}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3\left(1-\frac{k}{n}\right)^7=120\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3\left(1-\frac{k}{n}\right)^7$$

すると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}q_n=120\int_0^1 x^3(1-x)^7\,dx$ ………(＊)

ここで，$u=1-x$ とおくと，$du=-dx$ で，$x=0\to 1$ のとき $u=1\to 0$ から

$$120\int_0^1 x^3(1-x)^7\,dx=120\int_1^0(1-u)^3u^7(-du)=120\int_0^1 u^7(1-u)^3\,du$$

$u^7(1-u)^3=u^7(1-3u+3u^2-u^3)=u^7-3u^8+3u^9-u^{10}$ となり，(＊)から，

$$\lim_{n\to\infty} q_n = 120\Big[\frac{u^8}{8} - \frac{u^9}{3} + \frac{3}{10}u^{10} - \frac{u^{11}}{11}\Big]_0^1 = 15 - 40 + 36 - \frac{120}{11} = \frac{1}{11}$$

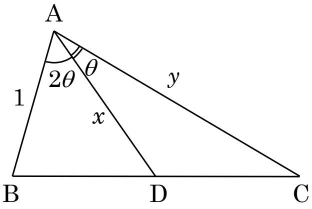
［解　説］

問題文の様相と異なり，標準的な確率の問題です。(2)は確率の最大，(3)は区分求積法との融合で，どちらも頻出タイプです。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　$0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$ で，$\mathrm{AB}=1$，$\angle\mathrm{BAC}=3\theta$ の $\triangle\mathrm{ABC}$ において，辺 BC の中点 D が $\angle\mathrm{BAD}=2\theta$ を満たす。



$\triangle\mathrm{ABD}=\triangle\mathrm{ADC}$ より，$\mathrm{AD}=x$，$\mathrm{AC}=y$ とおくと，

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot x\sin 2\theta=\frac{1}{2}xy\sin\theta,\quad \sin 2\theta=y\sin\theta$$

すると，$\mathrm{AC}=y=\dfrac{\sin 2\theta}{\sin\theta}=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta}=2\cos\theta$ となる。

(2)　$\triangle\mathrm{ABC}$ に余弦定理を適用すると，(1)から，

$$\mathrm{BC}^2=1^2+(2\cos\theta)^2-2\cdot 1\cdot 2\cos\theta\cdot\cos 3\theta$$
$$=1+4\cos^2\theta-4\cos\theta(4\cos^3\theta-3\cos\theta)=1+16\cos^2\theta-16\cos^4\theta$$

したがって，$\mathrm{BC}=\sqrt{1+16\cos^2\theta-16\cos^4\theta}$ である。

(3)　(2)から $\mathrm{BC}=\sqrt{-16\left(\cos^2\theta-\dfrac{1}{2}\right)^2+5}$ となり，$0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$ から $\dfrac{1}{4}<\cos^2\theta<1$ なので，$\cos^2\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき，BC は最大値 $\sqrt{5}$ をとる。

このとき，$\cos\theta>0$ から $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となるので，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ である。

［解　説］

三角比の応用についての基本題です。(1)は正弦定理という手も考えられます。

3

問題のページへ

(1)　$f(x)=\sin^2 x-\cos x-1+k=-\cos^2 x-\cos x+k$ に対して，曲線 $C: y=f(x)$ $\left(0\leqq x\leqq \frac{3\pi}{2}\right)$ と x 軸の共有点は，$f(x)=0$ から，

$$-\cos^2 x-\cos x+k=0,\ \cos^2 x+\cos x=k \cdots\cdots\cdots ①$$

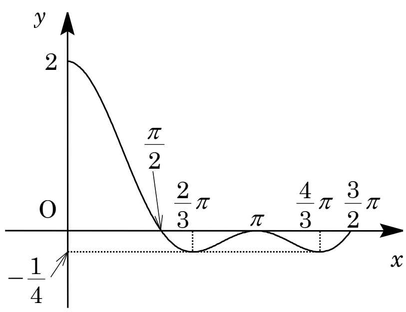
ここで，$h(x)=\cos^2 x+\cos x$ とおくと，

$$h'(x)=-2\cos x\sin x-\sin x=-\sin x(2\cos x+1)$$

$0\leqq x\leqq \frac{3\pi}{2}$ における $h(x)$ の増減は右表の通りである。

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{4}{3}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$
$h'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	2	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0

すると，$y=h(x)$ のグラフは右図のようになり，①の解の個数，すなわち曲線 C と x 軸の共有点の個数は，



$k<-\frac{1}{4}$，$2<k$ のとき　0 個

$0<k\leqq 2$ のとき　1 個

$k=-\frac{1}{4}$ のとき　2 個

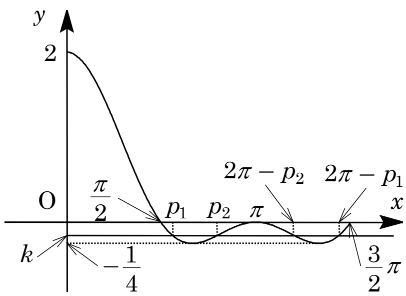
$k=0$ のとき　3 個

$-\frac{1}{4}<k<0$ のとき　4 個

(2)　$-\frac{1}{4}\leqq k\leqq 0$ のとき，曲線 C と x 軸の共有点の x 座標 p_1，p_2 について，

(i)　$-\frac{1}{4}<k<0$ のとき

x 座標の小さい方から，$x=p_1$，$x=p_2$ なので，$y=h(x)$ のグラフが直線 $x=\pi$ に関して対称なことを考えると，他の 2 つの共有点の x 座標は $x=2\pi-p_2$，$x=2\pi-p_1$ となる。



そこで，①から，$\cos^2 x+\cos x-k=0$ より，

$$\cos x=\frac{-1\pm\sqrt{1+4k}}{2}$$

$\cos p_1>\cos p_2$ から，$\cos p_1=\frac{-1+\sqrt{1+4k}}{2}$，$\cos p_2=\frac{-1-\sqrt{1+4k}}{2}\cdots\cdots\cdots ②$

(ii)　$k=0$ のとき　$p_1=\frac{\pi}{2}$，$p_2=\pi$ より，$\cos p_1=0$，$\cos p_2=-1$ となる。

(iii)　$k=-\frac{1}{4}$ のとき　$p_1=\frac{2}{3}\pi$，$p_2=\frac{4}{3}\pi$ より，$\cos p_1=\cos p_2=-\frac{1}{2}$ となる。

(i)〜(iii)より，$-\frac{1}{4}\leqq k\leqq 0$ のとき，②式は成立している。

さて，$g(k)=\int_{p_1}^{p_2} f(x)\sin x\,dx$ に対して，

$$g(k)=\int_{p_1}^{p_2}(-\cos^2 x-\cos x+k)\sin x\,dx=\Big[\frac{1}{3}\cos^3 x+\frac{1}{2}\cos^2 x-k\cos x\Big]_{p_1}^{p_2}$$
$$=\frac{1}{3}(\cos^3 p_2-\cos^3 p_1)+\frac{1}{2}(\cos^2 p_2-\cos^2 p_1)-k(\cos p_2-\cos p_1)$$

ここで，②から $\cos p_2-\cos p_1=-\sqrt{1+4k}$ となり，さらに $\cos p_1+\cos p_2=-1$，$\cos p_1\cos p_2=-k$ から，

$$g(k)=-\frac{\sqrt{1+4k}}{3}\{(-1)^2-(-k)\}-\frac{\sqrt{1+4k}}{2}\cdot(-1)+k\sqrt{1+4k}$$
$$=\frac{\sqrt{1+4k}}{6}\{-2(1+k)+3+6k\}=\frac{(1+4k)\sqrt{1+4k}}{6}=\frac{\sqrt{(1+4k)^3}}{6}$$

$-\frac{1}{4}\leqq k\leqq 0$ より，$g(k)$ の最大値は $g(0)=\frac{1}{6}$，最小値は $g\left(-\frac{1}{4}\right)=0$ である。

［解　説］

微積分の総合問題です。(1)は $\cos x$ についての 2 次方程式として処理もできますが，(2)の問題文で与えられた p_1，p_2 の設定をみて，三角関数 $h(x)$ の増減を調べました。

4

問題のページへ

(1)　k, l, m を自然数として，$k^2-l^2=3^m$ に対し，$(k-l)(k+l)=3^m$ ………①

①から，n を 0 以上の整数として，$(k-l,\ k+l)=(3^n,\ 3^{m-n})$ となり，

$$k=\frac{1}{2}(3^n+3^{m-n}),\quad l=\frac{1}{2}(3^n-3^{m-n})$$

ここで，$k-l<k+l$ から $n<m-n$ となり，$n<\frac{m}{2}$ である。

(i)　m が偶数のとき

$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \frac{m}{2}-1$ から，$(k,\ l)$ の組の個数は $\left(\frac{m}{2}-1\right)+1=\frac{m}{2}$ である。

(ii)　m が奇数のとき

$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \frac{m-1}{2}$ から，$(k,\ l)$ の組の個数は $\frac{m-1}{2}+1=\frac{m+1}{2}$ である。

(2)　自然数 x に対して，$\sqrt{x(x+3^m)}$ が整数となるとき，p を自然数として，

$$\sqrt{x(x+3^m)}=p,\quad x(x+3^m)=p^2,\quad x^2+3^mx-p^2=0$$

すると，$x>0$ から，$x=\dfrac{-3^m+\sqrt{3^{2m}+4p^2}}{2}$ ………②

x は自然数より，$3^{2m}+4p^2$ は平方数であることが必要で，q を自然数として，

$$3^{2m}+4p^2=q^2 \text{ ………③}$$

さて，③から，$q^2-4p^2=3^{2m}$ となり，$(q-2p)(q+2p)=3^{2m}$ なので，

$$(q-2p,\ q+2p)=(3^i,\ 3^{2m-i})\quad (i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1)$$

すると，$p=\dfrac{3^{2m-i}-3^i}{4}=\dfrac{3^i(3^{m-i}-1)(3^{m-i}+1)}{4}$，$q=\dfrac{3^i+3^{2m-i}}{2}$ となり，②から，

$$x=\frac{-3^m+q}{2}=\frac{1}{2}\left(-3^m+\frac{3^i+3^{2m-i}}{2}\right)=\frac{-2\cdot 3^m+3^i+3^{2m-i}}{4}$$

$$=\frac{3^i(-2\cdot 3^{m-i}+1+3^{2m-2i})}{4}=\frac{3^i(3^{m-i}-1)^2}{4}\text{ ………④}$$

ここで，$0\leqq i\leqq m-1$ から $1\leqq m-i\leqq m$ となり，$3^{m-i}-1$ は偶数から $(3^{m-i}-1)^2$ は 4 の倍数であるので，④から x は自然数である。

すると，3 の倍数でない自然数 x は，$i=0$ のときのみより，$x=\dfrac{(3^m-1)^2}{4}$ である。

(3)　④より，$x=\dfrac{3^i(3^{m-i}-1)^2}{4}$ $(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1)$ から，自然数 x の個数は，

$$(m-1)+1=m$$

［解　説］

難しめの整数問題です。(2)で(1)のプロセスをそのまま利用して，自然数 x を求めました。いろいろなアプローチの方法があると思える設問です。