

1

[解答例のページへ](#)

平面上の 4 点 A, B, C, D について, $|\overrightarrow{AB}| = p > 0$, $|\overrightarrow{AD}| = q > 0$, $\angle DAB = \theta$ ($0 < \theta < \pi$) とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 不等式 $|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CD}|^2 + |\overrightarrow{DA}|^2 \geq |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{BD}|^2$ を証明せよ。
- (2) (1)で等号が成り立つとき, 四角形 $ABCD$ の面積を p, q, θ を用いて表せ。

2

[解答例のページへ](#)

α を 0 ではない複素数とする。 $z = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ とおき、 $\beta = z\alpha$ 、 $\gamma = z^2\alpha$ とおく。

$0, \alpha, \beta, \gamma$ はそれぞれ複素数平面上の点 O, A, B, C を表すとする。ただし、 i は虚数単位である。以下の問いに答えよ。

- (1) $\angle BOC$ を求めよ。
- (2) 複素数 δ に対し、 δ が表す複素数平面上の点を D とするとき、線分 BD の垂直二等分線は A, C を通るとする。このような δ を α を用いて表せ。
- (3) $0 < \theta < \pi$ とする。点 D を、点 C を中心に θ だけ回転した点が B であるとする。このとき $\sin \theta$ を求めよ。

3[解答例のページへ](#)

xyz 空間において、5 点 $A(3, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(0, -3, 0)$, $D(3, 0, 3)$, $P(0, 0, 1)$ をとる。点 P を通り x 軸に平行な直線を l とする。四面体 $ABCD$ を l のまわりに 1 回転させるとき、この四面体が通過する部分の体積 V を求めよ。ただし、四面体は内部も含むものとする。

4

解答例のページへ

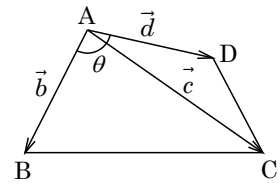
実数 $p > 1$ と正の整数 n に対して、 $S_n = \sum_{k=1}^n k^p$ とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^{p+1}}$ を求めよ。
- (2) $0 \leq \alpha < \beta$ とする。点 (α, α^p) における $y = x^p$ の接線の方程式を求めよ。また、不等式 $\frac{1}{2}(\beta - \alpha)\{2\alpha^p + p(\beta - \alpha)\alpha^{p-1}\} \leq \int_{\alpha}^{\beta} x^p dx \leq \frac{1}{2}(\beta - \alpha)(\beta^p + \alpha^p)$ を証明せよ。
- (3) (1)で求めた値を c とおく。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - cn^{p+1}}{n^p}$ を求めよ。

1

問題のページへ

- (1) 平面上の 4 点 A, B, C, D について, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ とおくと, $|\vec{b}| = p$, $|\vec{d}| = q$, $\angle DAB = \theta$ であり,



$$\begin{aligned} & |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CD}|^2 + |\overrightarrow{DA}|^2 - (|\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{BD}|^2) \\ &= |\vec{b}|^2 + |\vec{c} - \vec{b}|^2 + |\vec{d} - \vec{c}|^2 + |\vec{d}|^2 - (|\vec{c}|^2 + |\vec{d} - \vec{b}|^2) \\ &= 2|\vec{b}|^2 + 2|\vec{c}|^2 + 2|\vec{d}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} - 2\vec{c} \cdot \vec{d} - (|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + |\vec{d}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{d}) \\ &= |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + |\vec{d}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} - 2\vec{c} \cdot \vec{d} + 2\vec{b} \cdot \vec{d} = |\vec{b} - \vec{c} + \vec{d}|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

これより, $|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CD}|^2 + |\overrightarrow{DA}|^2 \geq |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{BD}|^2$ である。

- (2) $|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CD}|^2 + |\overrightarrow{DA}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{BD}|^2$ のとき, $|\vec{b} - \vec{c} + \vec{d}|^2 = 0$ となり,
 $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$, $\vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$

すると, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ から, 四角形 ABCD は平行四辺形であり, その面積は,

$$2(\triangle ABD) = 2 \cdot \frac{1}{2} pq \sin \theta = pq \sin \theta$$

[コメント]

平面ベクトルの基本題です。初めは, $\vec{c}$ を $\vec{b}$ と $\vec{d}$ の 1 次結合で表すつもりだったのですが, それには及びませんでした。

2

問題のページへ

- (1) $\alpha \neq 0$, $z = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ のとき, $\beta = z\alpha$, $\gamma = z^2\alpha$ とおくと,

$$\beta = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\alpha, \quad \gamma = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\alpha$$

ここで, $O(0)$, $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ とすると,

$$\angle BOC = \arg \gamma - \arg \beta = \arg \frac{\gamma}{\beta} = \arg \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$$

- (2) まず, 点 $D(\delta)$ は, 線分 BD の垂直二等分線が A , C を通るように定める。

さて, $OA = |\alpha|$, $OC = |\gamma| = 2|\alpha|$, $\angle AOC = \frac{\pi}{3}$ から,

$\angle OAC = \frac{\pi}{2}$ となるので, $BD \perp AC$, $AO \perp AC$ より,

$$BD \parallel AO \cdots \cdots \textcircled{1}$$

線分 BO , BD と直線 AC との交点を, それぞれ E , H と

おくと, $OB = \sqrt{2}|\alpha|$, $OE = \frac{|\alpha|}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{2}{\sqrt{3}}|\alpha|$ となり,

$$BE = \sqrt{2}|\alpha| - \frac{2}{\sqrt{3}}|\alpha| = \left(\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)|\alpha|$$

すると, $\triangle OAE$ と $\triangle BHE$ の相似比は, $OE : BE = \frac{2}{\sqrt{3}} : \left(\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 2 : (\sqrt{6} - 2)$

これより, $BD = 2BH = 2 \cdot \frac{\sqrt{6} - 2}{2} OA = (\sqrt{6} - 2)|\alpha| \cdots \cdots \textcircled{2}$

①②から, $\delta - \beta = (\sqrt{6} - 2)(0 - \alpha) = (2 - \sqrt{6})\alpha$ となり,

$$\begin{aligned} \delta &= \beta + (2 - \sqrt{6})\alpha = (z + 2 - \sqrt{6})\alpha = \left(\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i + 2 - \sqrt{6}\right)\alpha \\ &= \left(2 - \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\alpha \end{aligned}$$

- (3) $\angle OEA = \frac{\pi}{3}$ から $AH = OB \cos \frac{\pi}{3} = \sqrt{2}|\alpha| \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}|\alpha|$ となり,

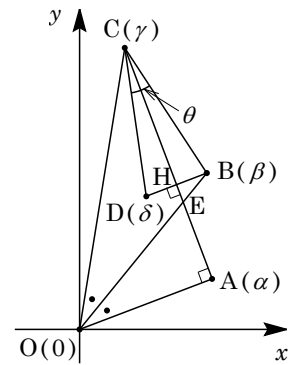
$$CH = AC - AH = |\alpha| \tan \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}|\alpha| = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}|\alpha| \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$BC = |\gamma - \beta| = |z^2\alpha - z\alpha| = |z(z-1)\alpha| = |z||z-1||\alpha| = \sqrt{2}|z-1||\alpha|$$

$z-1 = \left(\frac{\sqrt{6}}{2} - 1\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ より, $|z-1| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{3 - \sqrt{6}}$ となり,

$$BC = \sqrt{2}\sqrt{3 - \sqrt{6}}|\alpha| \cdots \cdots \textcircled{4}$$

さて, 点 C を中心に点 D を θ ($0 < \theta < \pi$) だけ回転した点が B であるので, 二等辺三角形 BCD の面積に着目すると, $\frac{1}{2}BC^2 \sin \theta = \frac{1}{2}BD \cdot CH$ となり, ②③④から,



$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{BD \cdot CH}{BC^2} = \frac{(\sqrt{6}-2)(2\sqrt{3}-\sqrt{2})|\alpha|^2}{2 \cdot 2(3-\sqrt{6})|\alpha|^2} = \frac{(\sqrt{6}-2)(2\sqrt{3}-\sqrt{2})}{4(3-\sqrt{6})} \\ &= \frac{4\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{2(3-\sqrt{6})} = \frac{(4\sqrt{2}-3\sqrt{3})(3+\sqrt{6})}{2(9-6)} = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}\end{aligned}$$

[コメント]

複素数と図形の問題です。(2)では、 $\triangle OAC$ が直角三角形であることに注目し、図形的に処理しました。(3)は、複素数平面での回転を数式化しても可能ですが、平方根の計算が複雑になったので、(2)と同様な方法に方針転換しました。

3

問題のページへ

xyz 空間で、 $A(3, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(0, -3, 0)$, $D(3, 0, 3)$ を頂点とする四面体 $ABCD$ に対して、平面 $x=t$ ($0 \leq t \leq 3$) における断面を調べる。

まず、線分 BA は、 $0 \leq u \leq 1$ として、

$$(x, y, z) = (0, 3, 0) + u(3, -3, 0)$$

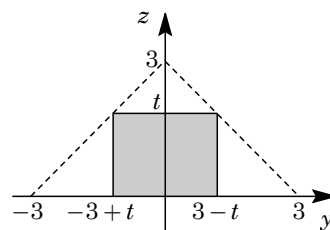
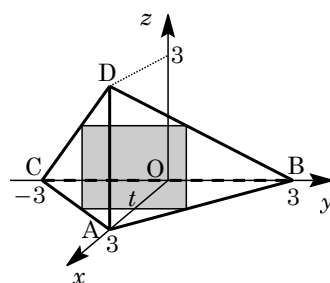
$x=t$ との交点は、 $3u=t$ から $(t, 3-t, 0)$ となる。

また、線分 BD は、 $0 \leq v \leq 1$ として、

$$(x, y, z) = (0, 3, 0) + v(3, -3, 3)$$

$x=t$ との交点は、 $3v=t$ から $(t, 3-t, t)$ となる。

ここで、 xz 平面についての対称性を利用すると、四面体 $ABCD$ を平面 $x=t$ ($0 \leq t \leq 3$) で切断したときの断面は、右図の網点部の長方形となる。



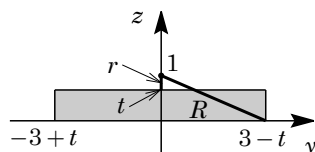
さて、点 $P(0, 0, 1)$ を通り x 軸に平行な直線 l と平面 $x=t$ の交点は $Q(t, 0, 1)$ となる。そこで、四面体 $ABCD$ を l のまわりに 1 回転させると、平面 $x=t$ 上では点 Q のまわりに長方形の断面を 1 回転させることが対応し、その図形の面積 $S(t)$ は、

(i) $0 \leq t \leq 1$ のとき

断面を 1 回転させてできる図形はドーナツ形で、外径

$$R = \sqrt{(3-t)^2 + 1^2} = \sqrt{t^2 - 6t + 10}, \text{ 内径 } r = 1-t \text{ より、}$$

$$S(t) = \pi(t^2 - 6t + 10) - \pi(1-t)^2 = \pi(-4t + 9)$$

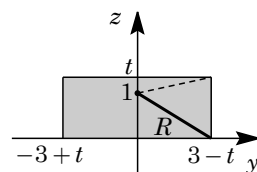


(ii) $1 \leq t \leq 2$ のとき

断面を 1 回転させてできる図形は円板で、外径

$$R = \sqrt{(3-t)^2 + 1^2} = \sqrt{t^2 - 6t + 10} \text{ より、}$$

$$S(t) = \pi(t^2 - 6t + 10)$$

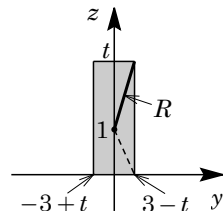


(iii) $2 \leq t \leq 3$ のとき

断面を 1 回転させてできる図形は円板で、外径

$$R = \sqrt{(3-t)^2 + (t-1)^2} = \sqrt{2t^2 - 8t + 10} \text{ より、}$$

$$S(t) = \pi(2t^2 - 8t + 10)$$



(i)～(iii)より、求める四面体 $ABCD$ が通過する部分の体積 V は、

$$\begin{aligned} V &= \int_0^3 S(t) dt = \int_0^1 S(t) dt + \int_1^2 S(t) dt + \int_2^3 S(t) dt \\ &= \pi \int_0^1 (-4t + 9) dt + \pi \int_1^2 (t^2 - 6t + 10) dt + \pi \int_2^3 (2t^2 - 8t + 10) dt \\ &= \pi \left[-2t^2 + 9t \right]_0^1 + \pi \left[\frac{t^3}{3} - 3t^2 + 10t \right]_1^2 + \pi \left[\frac{2}{3}t^3 - 4t^2 + 10t \right]_2^3 \end{aligned}$$

値を代入してまとめると,

$$V = \pi(-2+9) + \pi\left(\frac{7}{3}-9+10\right) + \pi\left(\frac{38}{3}-20+10\right) = 13\pi$$

[コメント]

四面体を回転させてできる立体の体積を求める問題です。誘導のないので、まず四面体と回転軸との位置関係を把握するところから始める必要があります。

4

問題のページへ

- (1) $p > 1$, 正の整数 n に対して, $S_n = \sum_{k=1}^n k^p$ のとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^{p+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^n k^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^p = \int_0^1 x^p dx = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+1}$$

- (2) $0 \leq \alpha$ のとき, $y = x^p$ 上の点 (α, α^p) における接線の方程式は, $y' = px^{p-1}$ から,
 $y - \alpha^p = p\alpha^{p-1}(x - \alpha)$, $y = p\alpha^{p-1}x - (p-1)\alpha^p \cdots \cdots \textcircled{1}$

さて, $x > 0$ において $y' > 0$, $y'' = p(p-1)x^{p-2} > 0$ から, $y = x^p$ のグラフは単調に増加し, 下に凸である。そして, $0 \leq \alpha < \beta$ のとき, $A(\alpha, \alpha^p)$, $B(\beta, \beta^p)$, $D(\alpha, 0)$, $E(\beta, 0)$ とおく。

また, 点 A における接線と直線 $x = \beta$ の交点を C とおくと, ①から, $C(\beta, p\alpha^{p-1}(\beta - \alpha) + \alpha^p)$ となる。

そこで, 台形 ADEB の面積を I_n , 台形 ADEC の面積を

J_n とおくと, $J_n \leq \int_{\alpha}^{\beta} x^p dx \leq I_n \cdots \cdots \textcircled{2}$ となり,

$$I_n = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)(\beta^p + \alpha^p)$$

$$J_n = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)\{p\alpha^{p-1}(\beta - \alpha) + \alpha^p + \alpha^p\} = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)\{2\alpha^p + p(\beta - \alpha)\alpha^{p-1}\}$$

②に代入すると,

$$\frac{1}{2}(\beta - \alpha)\{2\alpha^p + p(\beta - \alpha)\alpha^{p-1}\} \leq \int_{\alpha}^{\beta} x^p dx \leq \frac{1}{2}(\beta - \alpha)(\beta^p + \alpha^p) \cdots \cdots \textcircled{3}$$

- (3) $c = \int_0^1 x^p dx$ から, $T_n = \frac{S_n - cn^{p+1}}{n^p} = \frac{S_n}{n^p} - cn = n\left(\frac{S_n}{n^{p+1}} - \int_0^1 x^p dx\right)$ とおく。

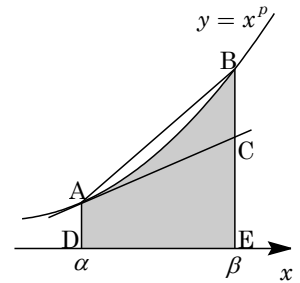
ここで, $\int_0^1 x^p dx = \sum_{k=1}^n \left(\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} x^p dx\right)$ より, ③において $\alpha = \frac{k-1}{n}$, $\beta = \frac{k}{n}$ のとき,

$$\frac{1}{2n}\left\{2\left(\frac{k-1}{n}\right)^p + \frac{p}{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^{p-1}\right\} \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} x^p dx \leq \frac{1}{2n}\left\{\left(\frac{k}{n}\right)^p + \left(\frac{k-1}{n}\right)^p\right\}$$

$$\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \left\{2\left(\frac{k-1}{n}\right)^p + \frac{p}{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^{p-1}\right\} \leq \int_0^1 x^p dx \leq \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \left\{\left(\frac{k}{n}\right)^p + \left(\frac{k-1}{n}\right)^p\right\}$$

(1) から, $\frac{S_n}{n^{p+1}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^p$ より,

$$\begin{aligned} \frac{S_n}{n^{p+1}} - \int_0^1 x^p dx &\geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^p - \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \left\{\left(\frac{k}{n}\right)^p + \left(\frac{k-1}{n}\right)^p\right\} \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \left\{\left(\frac{k}{n}\right)^p - \left(\frac{k-1}{n}\right)^p\right\} = \frac{1}{2n} \left\{\left(\frac{n}{n}\right)^p - \left(\frac{0}{n}\right)^p\right\} = \frac{1}{2n} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\frac{S_n}{n^{p+1}} - \int_0^1 x^p dx &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^p - \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \left\{ 2\left(\frac{k-1}{n}\right)^p + \frac{p}{n} \left(\frac{k-1}{n}\right)^{p-1} \right\} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ \left(\frac{k}{n}\right)^p - \left(\frac{k-1}{n}\right)^p \right\} - \frac{p}{2n^2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k-1}{n}\right)^{p-1} \\
&= \frac{1}{n} - \frac{p}{2n^2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k-1}{n}\right)^{p-1}
\end{aligned}$$

まとめると, $\frac{1}{2n} \leq \frac{S_n}{n^{p+1}} - \int_0^1 x^p dx \leq \frac{1}{n} - \frac{p}{2n^2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k-1}{n}\right)^{p-1}$ となり,

$$\frac{1}{2} \leq T_n \leq 1 - \frac{p}{2n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k-1}{n}\right)^{p-1} \dots\dots\dots \textcircled{4}$$

さらに, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k-1}{n}\right)^{p-1} = \int_0^1 x^{p-1} dx = \left[\frac{x^p}{p} \right]_0^1 = \frac{1}{p}$ となり,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \frac{p}{2n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k-1}{n}\right)^{p-1} \right\} = 1 - \frac{p}{2} \cdot \frac{1}{p} = \frac{1}{2}$$

④より, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - cn^{p+1}}{n^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \frac{1}{2}$ である。

[コメント]

誘導はついているものの, かなり難しめの微積分の総合問題です。区分求積から始まり, 凸関数と不等式の証明, この結果をもとに評価式④を丁寧に組み立て数列の極限へと繋ぐ構図になっています。