1

解答解説のページへ

円に内接する四角形 ABPC は次の条件(イ), (ロ)を満たすとする。

(イ)　三角形 ABC は正三角形である。

(ロ)　AP と BC の交点は線分 BC を $p:1-p$ $(0<p<1)$ の比に内分する。

このときベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, p を用いて表せ。

2

解答解説のページへ

実数 x_1，…，x_n $(n \geqq 3)$ が条件 $x_{k-1} - 2x_k + x_{k+1} > 0$ $(2 \leqq k \leqq n-1)$ を満たすとし，x_1，…，x_n の最小値を m とする。このとき，$x_l = m$ となる $l (1 \leqq l \leqq n)$ の個数は 1 または 2 であることを示せ。

$\boxed{3}$　解答解説のページへ

$\vec{a}=(1,\ 0,\ 0)$，$\vec{b}=(\cos 60^\circ,\ \sin 60^\circ,\ 0)$とする。

(1)　長さ 1 の空間ベクトル$\vec{c}$に対し，$\cos\alpha=\vec{a}\cdot\vec{c}$，$\cos\beta=\vec{b}\cdot\vec{c}$とおく。このとき次の不等式(＊)が成り立つことを示せ。

$$(*)\quad \cos^2\alpha-\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta\leqq\frac{3}{4}$$

(2)　不等式(＊)を満たす$(\alpha,\ \beta)$ $(0^\circ\leqq\alpha\leqq180^\circ,\ 0^\circ\leqq\beta\leqq180^\circ)$の範囲を図示せよ。

4

解答解説のページへ

三角形 ABC において辺 BC, CA, AB の長さをそれぞれ a, b, c とする。この三角形 ABC は次の条件(イ), (ロ), (ハ)を満たすとする。

(イ)　ともに 2 以上である自然数 p と q が存在して，$a = p + q$，$b = pq + p$，$c = pq + 1$ となる。

(ロ)　自然数 n が存在して a, b, c のいずれかは 2^n である。

(ハ)　$\angle$A，$\angle$B，$\angle$C のいずれかは $60°$ である。

このとき次の問いに答えよ。

(1)　$\angle$A，$\angle$B，$\angle$C を大きさの順に並べよ。

(2)　a, b, c を求めよ。

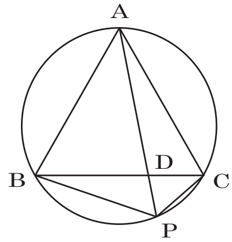
$\boxed{5}$

解答解説のページへ

a を実数とする。x の 2 次方程式 $x^2 - ax = 2\int_0^1 |t^2 - at|\,dt$ は $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲にいくつの解をもつか。

$\boxed{1}$

問題のページへ



対角線 AP と BC の交点を D とすると，条件(ロ)より，$BD : DC = p : (1-p)$ なので，

$$\overrightarrow{AD} = (1-p)\overrightarrow{AB} + p\overrightarrow{AC}$$

ここで，正三角形 ABC の 1 辺の長さを 1 としても，一般性は失われないので，

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| = 1$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 1\cdot 1\cdot\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$|\overrightarrow{AD}|^2 = (1-p)^2|\overrightarrow{AB}|^2 + 2(1-p)p\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + p^2|\overrightarrow{AC}|^2$$

$$= (1-p)^2 + (1-p)p + p^2 = 1 - p + p^2$$

よって，$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{1-p+p^2}$

ここで，方べきの定理より，$AD\cdot DP = BD\cdot DC$

$$DP = \frac{BD\cdot DC}{AD} = \frac{p(1-p)}{\sqrt{1-p+p^2}}$$

すると，$AD : AP = \sqrt{1-p+p^2} : \left(\sqrt{1-p+p^2} + \dfrac{p(1-p)}{\sqrt{1-p+p^2}}\right)$

$$= (1-p+p^2) : (1-p+p^2+p-p^2)$$

$$= (1-p+p^2) : 1$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{1-p+p^2}\overrightarrow{AD} = \frac{1-p}{1-p+p^2}\overrightarrow{AB} + \frac{p}{1-p+p^2}\overrightarrow{AC}$$

［解 説］

方べきの定理が活躍する構図の設問です。まず，1 問完答ではずみをつける問題です。

$\boxed{2}$

問題のページへ

$x_{k-1}-2x_k+x_{k+1}>0$ より，$x_k-x_{k-1}<x_{k+1}-x_k$

ここで，$y_k=x_{k+1}-x_k$ とおくと，$y_{k-1}<y_k$ となり，$2\leqq k\leqq n-1$ から，

$$y_1<y_2<\cdots\cdots<y_{n-2}<y_{n-1}$$

(i)　$y_1>0$ のとき

$0<y_1<y_2<\cdots\cdots<y_{n-2}<y_{n-1}$ より，$x_1<x_2<x_3<\cdots\cdots<x_{n-2}<x_{n-1}<x_n$

x_1，…，x_n の最小値 m は x_1 である。

(ii)　$y_{n-1}\leqq 0$ のとき

$y_1<y_2<\cdots\cdots<y_{n-2}<y_{n-1}\leqq 0$ より，$x_1>x_2>x_3>\cdots\cdots>x_{n-2}>x_{n-1}\geqq x_n$

x_1，…，x_n の最小値 m は x_n，または x_n と x_{n-1} である。

(iii)　$y_1\leqq 0$ かつ $y_{n-1}>0$ のとき

$y_1<y_2<\cdots\cdots<y_i\leqq 0<y_{i+1}<\cdots\cdots<y_{n-2}<y_{n-1}$ となる i $(1\leqq i\leqq n-2)$ が存在する。

$$x_1>x_2>x_3>\cdots\cdots>x_i\geqq x_{i+1}<x_{i+2}<\cdots\cdots<x_{n-2}<x_{n-1}<x_n$$

x_1，…，x_n の最小値 m は x_{i+1}，または x_{i+1} と x_i である。

(i)(ii)(iii)より，$x_l=m$ となる l の個数は 1 または 2 である。

［解 説］

与えられた不等式の意味は，階差数列が単調増加する漸化式というものです。この階差数列 $\{y_n\}$ の符号で，もとの数列 $\{x_n\}$ の増減の様子が把握できます。

3

問題のページへ

(1)　$\vec{c}=(p,\ q,\ r)$とおくと，$|\vec{c}|=1$より，$p^2+q^2+r^2=1$

$\vec{a}=(1,\ 0,\ 0)$，$\vec{b}=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$から，

$$\cos\alpha=\vec{a}\cdot\vec{c}=p,\ \cos\beta=\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{1}{2}p+\frac{\sqrt{3}}{2}q$$

ここで，$\cos^2\alpha-\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=p^2-p\left(\dfrac{1}{2}p+\dfrac{\sqrt{3}}{2}q\right)+\left(\dfrac{1}{2}p+\dfrac{\sqrt{3}}{2}q\right)^2$

$$=\frac{3}{4}p^2+\frac{3}{4}q^2=\frac{3}{4}(1-r^2)\leqq\frac{3}{4}$$

(2)　(1)より，$\cos^2\alpha-\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta-\dfrac{3}{4}\leqq 0$

$$\frac{1+\cos 2\alpha}{2}-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}+\frac{1+\cos 2\beta}{2}-\frac{3}{4}\leqq 0$$

$$\cos 2\alpha+\cos 2\beta-\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)+\frac{1}{2}\leqq 0$$

$$4\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)-2\cos(\alpha+\beta)-2\cos(\alpha-\beta)+1\leqq 0$$

$$\{2\cos(\alpha+\beta)-1\}\{2\cos(\alpha-\beta)-1\}\leqq 0$$

ここで，$0°\leqq\alpha+\beta\leqq 360°$，$-180°\leqq\alpha-\beta\leqq 180°$に注意して，

(i)　$2\cos(\alpha+\beta)-1\geqq 0$かつ$2\cos(\alpha-\beta)-1\leqq 0$のとき

$\cos(\alpha+\beta)\geqq\dfrac{1}{2}$……①，$\cos(\alpha-\beta)\leqq\dfrac{1}{2}$……②

①より，$0°\leqq\alpha+\beta\leqq 60°$または$300°\leqq\alpha+\beta\leqq 360°$

$-\alpha\leqq\beta\leqq-\alpha+60°$または$-\alpha+300°\leqq\beta\leqq-\alpha+360°$

②より，$-180°\leqq\alpha-\beta\leqq-60°$または$60°\leqq\alpha-\beta\leqq 180°$

$\alpha+60°\leqq\beta\leqq\alpha+180°$または$\alpha-180°\leqq\beta\leqq\alpha-60°$

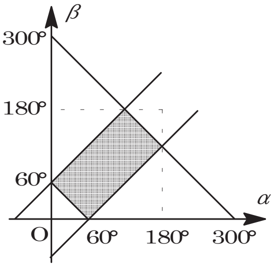
(ii)　$2\cos(\alpha+\beta)-1\leqq 0$かつ$2\cos(\alpha-\beta)-1\geqq 0$のとき

$\cos(\alpha+\beta)\leqq\dfrac{1}{2}$……③，$\cos(\alpha-\beta)\geqq\dfrac{1}{2}$……④

③より$60°\leqq\alpha+\beta\leqq 300°$，$-\alpha+60°\leqq\beta\leqq-\alpha+300°$

④より$-60°\leqq\alpha-\beta\leqq 60°$，$\alpha-60°\leqq\beta\leqq\alpha+60°$

(i)(ii)より，点$(\alpha,\ \beta)$ $(0°\leqq\alpha\leqq 180°,\ 0°\leqq\beta\leqq 180°)$の範囲は右図の網点部となる。なお，境界は領域に含む。



［解　説］

(2)は，もとの設定を無視して不等式を変形していくと，結論が見えてきます。

4

問題のページへ

(1)　条件(イ)より，$b-c=pq+p-(pq+1)=p-1>0$

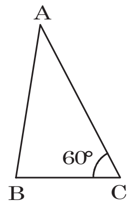
$$c-a=pq+1-(p+q)=(p-1)(q-1)>0$$

これから, $a<c<b$ となるので，$\angle A<\angle C<\angle B$

(2)　$\angle A=60°$ とすると, (1)より $\angle A+\angle B+\angle C>60°+60°+60°=180°$

$\angle B=60°$ とすると, (1)より $\angle A+\angle B+\angle C<60°+60°+60°=180°$

いずれも不適なので，条件(ハ)より，$\angle C=60°$



$\triangle$ABC に余弦定理を適用して,

$$(pq+1)^2=(pq+p)^2+(p+q)^2-2(pq+p)(p+q)\cos 60°$$

変形して，$pq+1=p^2q+p^2+q^2-pq^2$

$$(q+1)p^2-q(q+1)p+(q+1)(q-1)=0,\ (q+1)(p-1)(p-q+1)=0$$

$p>1, q>1$ より，$q=p+1$

よって，$a=2p+1$，$b=p(p+2)$，$c=p(p+1)+1$

すると, a, c は p の偶奇にかかわらずともに奇数なるので，条件(ロ)より,

$$p(p+2)=2^n$$

よって，p は 2 以上の自然数なので，$k,\ l$ を $k<l$ を満たす自然数として，$p=2^k$，$p+2=2^l$ と表すことができる。

$$2^l-2^k=2,\ 2^k(2^{l-k}-1)=2,\ 2^{k-1}(2^{l-k}-1)=1$$

$k-1\geqq 0$，$l-k\geqq 1$ なので，$k-1=0$ かつ $l-k=1$ となる。

すなわち，$k=1$，$l=2$ から，$p=2$ である。

以上より，$a=5$，$b=8$，$c=7$

[解　説]

三角形の辺と角の大小関係については, 明らかとしてよいのでしょう。数学 A の教科書には, その証明が載っていたり載っていなかったりと, まちまちですが, ちょっと気になりました。

$\boxed{5}$

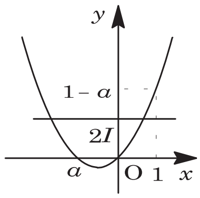
問題のページへ

$I=\int_0^1|t^2-at|dt$ とおくと, $x^2-ax=2I$ の解の個数は, $y=x^2-ax$ と $y=2I$ のグラフの共有点の個数と一致する。

(i)　$a<0$ のとき

$$I=\int_0^1(t^2-at)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{a}{2}t^2\right]_0^1=\frac{1}{3}-\frac{a}{2}$$

$$2I-(1-a)=\frac{2}{3}-a-1+a=-\frac{1}{3}<0$$



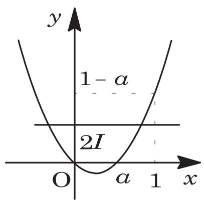
よって, $0<2I<1-a$ となるので, 右図より, $0\leqq x\leqq 1$ の範囲に解は 1 個である。

(ii)　$0\leqq a\leqq 1$ のとき

$$I=\int_0^a-(t^2-at)dt+\int_a^1(t^2-at)dt=-\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{a}{2}t^2\right]_0^a+\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{a}{2}t^2\right]_a^1$$

$$=\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}$$

$$2I-(1-a)=\frac{2}{3}a^3-a+\frac{2}{3}-1+a=\frac{1}{3}(2a^3-1)$$



(ii-i)　$2I\leqq 1-a\left(0\leqq a\leqq\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ のとき

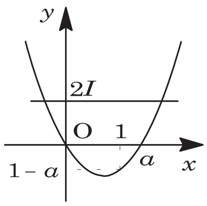
$0<2I\leqq 1-a$ となるので, 右図より, $0\leqq x\leqq 1$ の範囲に解は 1 個である。

(ii-ii)　$2I>1-a\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}<a\leqq 1\right)$ のとき

$0<1-a<2I$ となるので, $0\leqq x\leqq 1$ の範囲に解はない。

(iii)　$1<a$ のとき

$0<2I$ となるので, 右図より, $0\leqq x\leqq 1$ の範囲に解はない。



(i)(ii)(iii)より, 求める解の個数は, $a\leqq\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ のとき 1 個, $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}<a$ のとき 0 個である。

[解　説]

当然ですが, $I>0$ です。これが場合分けを少なくし, 議論をスッキリさせるポイントです。