1

解答解説のページへ

円に内接する四角形 ABPC は次の条件(イ), (ロ)を満たすとする。

(イ)　三角形 ABC は正三角形である。

(ロ)　AP と BC の交点は線分 BC を $p:1-p$ $(0<p<1)$ の比に内分する。

このときベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, p を用いて表せ。

2

解答解説のページへ

実数 a は $0 < a \leqq 2$ の範囲を動くものとする。

(1) $y=\sqrt{x}$ と $y=\dfrac{2}{a}x+1-\dfrac{1}{a}$ のグラフが共有点をもつような a の範囲を求めよ。

(2) 2 次方程式 $(2x+a-1)^2=a^2x$ の複素数の範囲で考えた 2 つの解を α，β（ただし $|\alpha| \leqq |\beta|$）とする。このとき，$|\beta|$ の最小値を求めよ。

3

解答解説のページへ

$\vec{a}=(1,\ 0,\ 0)$，$\vec{b}=\left(\cos\dfrac{\pi}{3},\ \sin\dfrac{\pi}{3},\ 0\right)$とする。

(1)　長さ 1 の空間ベクトル$\vec{c}$に対し，$\cos\alpha=\vec{a}\cdot\vec{c}$，$\cos\beta=\vec{b}\cdot\vec{c}$とおく。このとき次の不等式(＊)が成り立つことを示せ。

$$(*)\quad \cos^2\alpha-\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta\leqq\frac{3}{4}$$

(2)　不等式(＊)を満たす$(\alpha,\ \beta)$ $(0\leqq\alpha\leqq\pi,\ 0\leqq\beta\leqq\pi)$の範囲を図示せよ。

4

解答解説のページへ

p を素数，a，b を互いに素な正の整数とするとき，$(a+bi)^p$ は実数ではないことを示せ。ただし，i は虚数単位を表す。

5

解答解説のページへ

数列$\{c_n\}$を次の式で定める。

$$c_n = (n+1)\int_0^1 x^n \cos \pi x \, dx \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

このとき,

(1)　c_nとc_{n+2}の関係を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} c_n$を求めよ。

(3)　(2)で求めた極限値をcとするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}-c}{c_n - c}$を求めよ。

6

解答解説のページへ

n, k は整数で，$n \geqq 2$，$0 \leqq k \leqq 4$ とする。サイコロを n 回投げて出た目の和を 5 で割ったときの余りが k に等しくなる確率を $p_n(k)$ とする。

(1)　$p_{n+1}(0)$，…，$p_{n+1}(4)$ を $p_n(0)$，…，$p_n(4)$ を用いて表せ。

(2)　$p_n(0)$，…，$p_n(4)$ の最大値を M_n，最小値を m_n とするとき，次の(イ)，(ロ)が成立することを示せ。

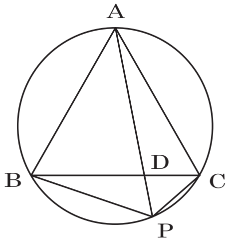
(イ)　$m_n \leqq \dfrac{1}{5} \leqq M_n$

(ロ)　任意の k, l（$0 \leqq k, l \leqq 4$）に対し，$p_{n+1}(k) - p_{n+1}(l) \leqq \dfrac{1}{6}(M_n - m_n)$

(3)　$\lim\limits_{n \to \infty} p_n(k)$ を求めよ。

1

問題のページへ



対角線 AP と BC の交点を D とすると，条件(ロ)より，$BD : DC = p : (1-p)$ なので，

$$\overrightarrow{AD} = (1-p)\overrightarrow{AB} + p\overrightarrow{AC}$$

ここで，正三角形 ABC の 1 辺の長さを 1 としても，一般性は失われないので，

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| = 1$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 1\cdot 1\cdot\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$|\overrightarrow{AD}|^2 = (1-p)^2|\overrightarrow{AB}|^2 + 2(1-p)p\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + p^2|\overrightarrow{AC}|^2$$

$$= (1-p)^2 + (1-p)p + p^2 = 1 - p + p^2$$

よって，$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{1-p+p^2}$

ここで，方べきの定理より，$AD\cdot DP = BD\cdot DC$

$$DP = \frac{BD\cdot DC}{AD} = \frac{p(1-p)}{\sqrt{1-p+p^2}}$$

すると，$AD : AP = \sqrt{1-p+p^2} : \left(\sqrt{1-p+p^2} + \dfrac{p(1-p)}{\sqrt{1-p+p^2}}\right)$

$$= (1-p+p^2) : (1-p+p^2+p-p^2)$$

$$= (1-p+p^2) : 1$$

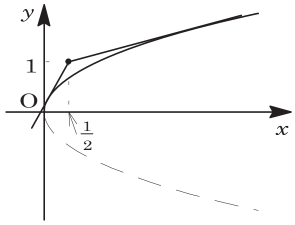
$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{1-p+p^2}\overrightarrow{AD} = \frac{1-p}{1-p+p^2}\overrightarrow{AB} + \frac{p}{1-p+p^2}\overrightarrow{AC}$$

［解 説］

方べきの定理が活躍する構図の設問です。まず，1 問完答ではずみをつける問題です。

2

問題のページへ



(1)　$y=\sqrt{x}$ ……①，$y=\dfrac{2}{a}x+1-\dfrac{1}{a}$ ……②

②より，$ay=2x+a-1$，$2x-1+a(1-y)=0$

これより，どんな a の値に対しても，直線②は $(x,\ y)=\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$を通る。

さて，図より①と②が共有点をもつ条件と，$y=\pm\sqrt{x}$ と②が共有点をもつ条件は一致するので，これを連立し，

$$\pm\sqrt{x}=\frac{2}{a}x+1-\frac{1}{a},\ a^2x=(2x+a-1)^2\ \cdots\cdots\cdots ③$$

よって，①と②が共有点をもつ条件は，③が実数解をもつ条件となる。

③を変形して，$4x^2-(a-2)^2x+(a-1)^2=0$ ………④

$$D=(a-2)^4-16(a-1)^2\geqq 0$$

$$\left\{(a-2)^2-4(a-1)\right\}\left\{(a-2)^2+4(a-1)\right\}\geqq 0,\ (a^2-8a+8)a^2\geqq 0$$

$0<a\leqq 2$ より，$0<a\leqq 4-2\sqrt{2}$

(2)　(1)より，③は $0<a\leqq 4-2\sqrt{2}$ のとき実数解をもち，$4-2\sqrt{2}<a\leqq 2$ のとき共役な虚数解をもつ。

(i)　$0<a\leqq 4-2\sqrt{2}$ のとき

$0\leqq\alpha\leqq\beta$ より，$|\beta|$が最小となるのは，(1)の図より①と②が接する $a=4-2\sqrt{2}$ のときである。

このとき④より，$\beta=\dfrac{(a-2)^2}{8}=\dfrac{(2-2\sqrt{2})^2}{8}=\dfrac{(1-\sqrt{2})^2}{2}$

$$|\beta|=\frac{(1-\sqrt{2})^2}{2}=\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$$

(ii)　$4-2\sqrt{2}<a\leqq 2$ のとき

$\beta=\overline{\alpha}$ なので，④に解と係数の関係を用いて，$\alpha\overline{\alpha}=\dfrac{(a-1)^2}{4}$

すなわち，$|\beta|^2=|\alpha|^2=\dfrac{(a-1)^2}{4}$ なので，$|\beta|=\dfrac{|a-1|}{2}$ となる。

すると，$|\beta|>\dfrac{|4-2\sqrt{2}-1|}{2}=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}$

(i)(ii)より，$|\beta|$の最小値は $\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}$ である。

［解 説］

②の通過する定点が①のグラフの上側にあることを用いた直観的な解です。

3

問題のページへ

(1)　$\vec{c}=(p,\ q,\ r)$とおくと，$|\vec{c}|=1$より，$p^2+q^2+r^2=1$

$\vec{a}=(1,\ 0,\ 0)$，$\vec{b}=\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$から，

$$\cos\alpha=\vec{a}\cdot\vec{c}=p,\ \cos\beta=\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{1}{2}p+\frac{\sqrt{3}}{2}q$$

ここで，$\cos^2\alpha-\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=p^2-p\left(\frac{1}{2}p+\frac{\sqrt{3}}{2}q\right)+\left(\frac{1}{2}p+\frac{\sqrt{3}}{2}q\right)^2$

$$=\frac{3}{4}p^2+\frac{3}{4}q^2=\frac{3}{4}(1-r^2)\leqq\frac{3}{4}$$

(2)　(1)より，$\cos^2\alpha-\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta-\frac{3}{4}\leqq 0$

$$\frac{1+\cos 2\alpha}{2}-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}+\frac{1+\cos 2\beta}{2}-\frac{3}{4}\leqq 0$$

$$\cos 2\alpha+\cos 2\beta-\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)+\frac{1}{2}\leqq 0$$

$$4\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)-2\cos(\alpha+\beta)-2\cos(\alpha-\beta)+1\leqq 0$$

$$\{2\cos(\alpha+\beta)-1\}\{2\cos(\alpha-\beta)-1\}\leqq 0$$

ここで，$0\leqq\alpha+\beta\leqq 2\pi$，$-\pi\leqq\alpha-\beta\leqq\pi$に注意して，

(i)　$2\cos(\alpha+\beta)-1\geqq 0$かつ$2\cos(\alpha-\beta)-1\leqq 0$のとき

$$\cos(\alpha+\beta)\geqq\frac{1}{2}\cdots\cdots①,\ \cos(\alpha-\beta)\leqq\frac{1}{2}\cdots\cdots②$$

①より，$0\leqq\alpha+\beta\leqq\frac{1}{3}\pi$または$\frac{5}{3}\pi\leqq\alpha+\beta\leqq 2\pi$

$$-\alpha\leqq\beta\leqq-\alpha+\frac{1}{3}\pi\text{ または }-\alpha+\frac{5}{3}\pi\leqq\beta\leqq-\alpha+2\pi$$

②より，$-\pi\leqq\alpha-\beta\leqq-\frac{1}{3}\pi$または$\frac{1}{3}\pi\leqq\alpha-\beta\leqq\pi$

$$\alpha+\frac{1}{3}\pi\leqq\beta\leqq\alpha+\pi\text{ または }\alpha-\pi\leqq\beta\leqq\alpha-\frac{1}{3}\pi$$

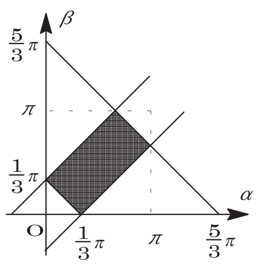
(ii)　$2\cos(\alpha+\beta)-1\leqq 0$かつ$2\cos(\alpha-\beta)-1\geqq 0$のとき

$$\cos(\alpha+\beta)\leqq\frac{1}{2}\cdots\cdots③,\ \cos(\alpha-\beta)\geqq\frac{1}{2}\cdots\cdots④$$

③より$\frac{1}{3}\pi\leqq\alpha+\beta\leqq\frac{5}{3}\pi$，$-\alpha+\frac{1}{3}\pi\leqq\beta\leqq-\alpha+\frac{5}{3}\pi$

④より$-\frac{1}{3}\pi\leqq\alpha-\beta\leqq\frac{1}{3}\pi$，$\alpha-\frac{1}{3}\pi\leqq\beta\leqq\alpha+\frac{1}{3}\pi$

(i)(ii)より，点$(\alpha,\ \beta)$ $(0\leqq\alpha\leqq\pi,\ 0\leqq\beta\leqq\pi)$の範囲は右図の網点部となる。なお，境界は領域に含む。



［解　説］

(2)は，もとの設定を無視して不等式を変形していくと，結論が見えてきます。

4

問題のページへ

$z=(a+bi)^p$ の虚部を I_p とおく。

(i)　$p=2$ のとき　$I_p=2ab>0$ より, z は虚数となる。

(ii)　$p\geqq 3$ のとき　p は素数なので, 奇数である。

$$I_p={}_p\mathrm{C}_1a^{p-1}b-{}_p\mathrm{C}_3a^{p-3}b^3+\cdots+{}_p\mathrm{C}_{p-2}a^2b^{p-2}(-1)^{\frac{p-3}{2}}+b^p(-1)^{\frac{p-1}{2}}$$
$$=b\left\{pa^{p-1}-{}_p\mathrm{C}_3a^{p-3}b^2+\cdots+{}_p\mathrm{C}_{p-2}a^2b^{p-3}(-1)^{\frac{p-3}{2}}+b^{p-1}(-1)^{\frac{p-1}{2}}\right\}$$

ここで $I_p=0$ とすると, $b>0$ より,

$$pa^{p-1}-{}_p\mathrm{C}_3a^{p-3}b^2+\cdots+{}_p\mathrm{C}_{p-2}a^2b^{p-3}(-1)^{\frac{p-3}{2}}+b^{p-1}(-1)^{\frac{p-1}{2}}=0\cdots\cdots\cdots①$$
$$pa^{p-1}={}_p\mathrm{C}_3a^{p-3}b^2-\cdots-{}_p\mathrm{C}_{p-2}a^2b^{p-3}(-1)^{\frac{p-3}{2}}-b^{p-1}(-1)^{\frac{p-1}{2}}$$
$$=b^2\left\{{}_p\mathrm{C}_3a^{p-3}-\cdots-{}_p\mathrm{C}_{p-2}a^2b^{p-5}(-1)^{\frac{p-3}{2}}-b^{p-3}(-1)^{\frac{p-1}{2}}\right\}\cdots\cdots\cdots②$$

さて, a, b は自然数より, ${}_p\mathrm{C}_3a^{p-3}-\cdots-{}_p\mathrm{C}_{p-2}a^2b^{p-5}(-1)^{\frac{p-3}{2}}-b^{p-3}(-1)^{\frac{p-1}{2}}$ は整数となり, ②の右辺は b^2 の倍数となる。

すると, ②の左辺も b^2 の倍数となるが, a と b は互いに素より, p が b^2 の倍数となる。ところが, p は素数なので $b=1$ しかありえない。

①より, $pa^{p-1}-{}_p\mathrm{C}_3a^{p-3}+\cdots+{}_p\mathrm{C}_{p-2}a^2(-1)^{\frac{p-3}{2}}+(-1)^{\frac{p-1}{2}}=0$

$$pa^{p-1}-{}_p\mathrm{C}_3a^{p-3}+\cdots+{}_p\mathrm{C}_{p-2}a^2(-1)^{\frac{p-3}{2}}=-(-1)^{\frac{p-1}{2}}\cdots\cdots\cdots③$$

③の左辺は a^2 の倍数となるが, 右辺は ±1 なので, $a>0$ より, $a=1$

以上より, $a=b=1$ の場合だけとなるので,

$$z=(1+i)^p=\left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right\}^p=2^{\frac{p}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}p+i\sin\frac{\pi}{4}p\right)$$

すると, $\arg z=\dfrac{\pi}{4}p$ となるが, p が素数より, $\dfrac{p}{4}$ は整数となりえない。

すなわち, $\arg z$ は π の整数倍とはならないので, z は虚数となる。

(i)(ii)より, いずれの場合も $(a+bi)^p$ は実数ではない。

［解 説］

(ii)の場合, いきなり上の解を思いついたわけではありません。$p=3$, 5, 7 と具体的に考え, その結果を一般的に記述したにすぎません。

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1) 部分積分を用いて,

$$
\begin{aligned}
c_{n+2} &= (n+3)\int_0^1 x^{n+2}\cos\pi x\,dx \\
&= (n+3)\left\{\frac{1}{\pi}\Big[x^{n+2}\sin\pi x\Big]_0^1 - \frac{1}{\pi}\int_0^1 (n+2)x^{n+1}\sin\pi x\,dx\right\} \\
&= -\frac{(n+3)(n+2)}{\pi}\int_0^1 x^{n+1}\sin\pi x\,dx \\
&= -\frac{(n+3)(n+2)}{\pi}\left\{-\frac{1}{\pi}\Big[x^{n+1}\cos\pi x\Big]_0^1 + \frac{1}{\pi}\int_0^1 (n+1)x^n\cos\pi x\,dx\right\} \\
&= \frac{(n+3)(n+2)}{\pi^2}(-1) - \frac{(n+3)(n+2)}{\pi^2}(n+1)\int_0^1 x^n\cos\pi x\,dx \\
&= -\frac{(n+3)(n+2)}{\pi^2}(1+c_n)
\end{aligned}
$$

(2) $|c_n| = (n+1)\left|\int_0^1 x^n\cos\pi x\,dx\right| \leqq (n+1)\int_0^1 |x^n\cos\pi x|\,dx$ ………①

$0 \leqq x \leqq 1$ において，$|x^n\cos\pi x| \leqq x^n$ より,

$$(n+1)\int_0^1 |x^n\cos\pi x|\,dx \leqq (n+1)\int_0^1 x^n dx = (n+1)\frac{1}{n+1} = 1 \text{ ………②}$$

(1)より，$1+c_n = -\dfrac{\pi^2}{(n+3)(n+2)}c_{n+2}$ なので，①②より $|c_n| \leqq 1$ を用いて,

$$|1+c_n| = \frac{\pi^2}{(n+3)(n+2)}|c_{n+2}| \leqq \frac{\pi^2}{(n+3)(n+2)}$$

$n\to\infty$ のとき $|1+c_n| \to 0$ なので，$\lim_{n\to\infty} c_n = -1$

(3) (2)から，$c_n - c = c_n + 1 = -\dfrac{\pi^2}{(n+3)(n+2)}c_{n+2}$ より,

$$c_{n+1} - c = -\frac{\pi^2}{(n+4)(n+3)}c_{n+3}$$

よって，$\dfrac{c_{n+1}-c}{c_n - c} = \dfrac{(n+3)(n+2)}{(n+4)(n+3)}\cdot\dfrac{c_{n+3}}{c_{n+2}} = \dfrac{1+\dfrac{2}{n}}{1+\dfrac{4}{n}}\cdot\dfrac{c_{n+3}}{c_{n+2}}$

(2)より，$\lim_{n\to\infty} c_n = -1$ なので，$\lim_{n\to\infty}\dfrac{c_{n+1}-c}{c_n - c} = \dfrac{1\times(-1)}{1\times(-1)} = 1$

［解 説］

(1)の漸化式から，(2)の $\lim_{n\to\infty} c_n$ が -1 であることは容易に推測できます。後はこれを論理的に示せばよいことになります。

6

問題のページへ

(1)　サイコロの目を 5 で割った余りが 1 となる確率は $\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$ で，それ以外の場合の確率はそれぞれ $\dfrac{1}{6}$ である。

ここで，$p_n(0)+p_n(1)+p_n(2)+p_n(3)+p_n(4)=1$ に留意すると，

$$p_{n+1}(0)=\frac{1}{6}p_n(0)+\frac{1}{6}p_n(1)+\frac{1}{6}p_n(2)+\frac{1}{6}p_n(3)+\frac{1}{3}p_n(4)=\frac{1}{6}p_n(4)+\frac{1}{6}$$

$$p_{n+1}(1)=\frac{1}{3}p_n(0)+\frac{1}{6}p_n(1)+\frac{1}{6}p_n(2)+\frac{1}{6}p_n(3)+\frac{1}{6}p_n(4)=\frac{1}{6}p_n(0)+\frac{1}{6}$$

$$p_{n+1}(2)=\frac{1}{6}p_n(0)+\frac{1}{3}p_n(1)+\frac{1}{6}p_n(2)+\frac{1}{6}p_n(3)+\frac{1}{6}p_n(4)=\frac{1}{6}p_n(1)+\frac{1}{6}$$

$$p_{n+1}(3)=\frac{1}{6}p_n(0)+\frac{1}{6}p_n(1)+\frac{1}{3}p_n(2)+\frac{1}{6}p_n(3)+\frac{1}{6}p_n(4)=\frac{1}{6}p_n(2)+\frac{1}{6}$$

$$p_{n+1}(4)=\frac{1}{6}p_n(0)+\frac{1}{6}p_n(1)+\frac{1}{6}p_n(2)+\frac{1}{3}p_n(3)+\frac{1}{6}p_n(4)=\frac{1}{6}p_n(3)+\frac{1}{6}$$

(2)　条件より，$p_1(0)=\dfrac{1}{6}$，$p_1(1)=\dfrac{1}{3}$，$p_1(2)=\dfrac{1}{6}$，$p_1(3)=\dfrac{1}{6}$，$p_1(4)=\dfrac{1}{6}$

(1)の漸化式を用いて，$p_2(0)=p_2(1)=p_2(3)=p_2(4)=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{7}{36}$

$$p_2(2)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2}{9}$$

まず, $n\geqq 2$ で $m_n\leqq\dfrac{1}{5}\leqq M_n$ が成立することを数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=2$ のとき　$m_2=\dfrac{7}{36}$，$M_2=\dfrac{2}{9}$ より，$m_2\leqq\dfrac{1}{5}\leqq M_2$

(ii)　$n=j$ のとき　$m_j\leqq\dfrac{1}{5}\leqq M_j$ と仮定する。

このとき，$M_{j+1}=\dfrac{1}{6}M_j+\dfrac{1}{6}\geqq\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{5}$

$$m_{j+1}=\frac{1}{6}m_j+\frac{1}{6}\leqq\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{1}{5}$$

(i)(ii)より, $n\geqq 2$ で $m_n\leqq\dfrac{1}{5}\leqq M_n$ が成立する。

次に，任意の k，l（$0\leqq k$，$l\leqq 4$）に対して，$m_n\leqq p_n(k)\leqq M_n$，$m_n\leqq p_n(l)\leqq M_n$ が成立するので，

$$\begin{aligned}p_{n+1}(k)-p_{n+1}(l)&\leqq M_{n+1}-m_{n+1}\\&=\left(\frac{1}{6}M_n+\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{1}{6}m_n+\frac{1}{6}\right)\\&=\frac{1}{6}(M_n-m_n)\end{aligned}$$

(3)　$M_{n+1}=\dfrac{1}{6}M_n+\dfrac{1}{6}$，$m_{n+1}=\dfrac{1}{6}m_n+\dfrac{1}{6}$ より，$M_{n+1}-m_{n+1}=\dfrac{1}{6}(M_n-m_n)$

$$M_n-m_n=(M_1-m_1)\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{6}\right)^{n}$$

すると, $n\to\infty$ のとき $M_n-m_n\to 0$ となる。

さらに(2)より，$m_n\leqq\dfrac{1}{5}\leqq M_n$ なので，$n\to\infty$ のとき $m_n\to\dfrac{1}{5}$，$M_n\to\dfrac{1}{5}$

したがって，$m_n\leqq p_n(k)\leqq M_n$ から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_n(k)=\frac{1}{5}$

［解 説］

(1)の 5 種類の漸化式の形が同じなので，最大値 M_n についての漸化式，最小値 m_n についての漸化式を作りました。そのため，(3)では M_n と m_n の一般項が求まるのですが，(2)の結果 $m_n\leqq\dfrac{1}{5}\leqq M_n$ を利用するために，迂回した解法をとりました。