1　解答解説のページへ

未知数 x に関する方程式 $x^4 - x^3 + x^2 - (a+2)x - a - 3 = 0$ が，虚軸上の複素数を解にもつような実数 a をすべて求めよ。

2

解答解説のページへ

xy 平面内の相異なる 4 点 P_1，P_2，P_3，P_4 とベクトル $\vec{v}$ に対し，$k \neq m$ のとき $\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_m} \cdot \vec{v} \neq 0$ が成り立っているとする。このとき，k と異なるすべての m に対し，$\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_m} \cdot \vec{v} < 0$ が成り立つような点 P_k が存在することを示せ。

3

解答解説のページへ

任意の整数 n に対し，$n^9 - n^3$ は 9 で割り切れることを示せ。

4

解答解説のページへ

n を 2 以上の整数とする。実数 a_1，a_2，…，a_n に対し，$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ とおく。$k = 1$，2，…，n について，不等式 $-1 < S - a_k < 1$ が成り立っているとする。

$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n$ のとき，すべての k について $|a_k| < 2$ が成り立つことを示せ。

5

解答解説のページへ

xy 平面内の $-1 \leqq y \leqq 1$ で定められる領域 D と，中心が P で原点 O を通る円 C を考える。C が D に含まれるという条件のもとで，P が動きうる範囲を図示し，その面積を求めよ。

1

問題のページへ

条件より，k を実数として，$x = ki$ とおき，$x^4 - x^3 + x^2 - (a+2)x - a - 3 = 0$ に代入すると，

$$k^4 + k^3 i - k^2 - (a+2)ki - a - 3 = 0$$

$$(k^4 - k^2 - a - 3) + (k^3 - ak - 2k)i = 0$$

k, a が実数より，

$$k^4 - k^2 - a - 3 = 0 \cdots\cdots①,\quad k^3 - ak - 2k = 0 \cdots\cdots②$$

②より $k(k^2 - a - 2) = 0$ なので，$k = 0$ または $k^2 = a + 2$

(i)　$k = 0$ のとき　①より $-a - 3 = 0$，$a = -3$

(ii)　$k^2 = a + 2$ のとき　①より $(a+2)^2 - (a+2) - a - 3 = 0$

$$a^2 + 2a - 1 = 0,\quad a = -1 \pm \sqrt{2}$$

$k^2 = a + 2 \geqq 0$ より，$a = -1 + \sqrt{2}$

(i)(ii)より，$a = -3,\ -1 + \sqrt{2}$

［解 説］

計算ミスをしなければ，正解に到達するという基本問題です。

$\boxed{2}$

問題のページへ

$P_1(x_1,\ y_1)$, $P_2(x_2,\ y_2)$, $P_3(x_3,\ y_3)$, $P_4(x_4,\ y_4)$とし，$\vec{v}=(1,\ 0)$とおいても一般性は失われない。

すると，条件より，任意の k, m に対して$\overrightarrow{P_kP_m}\cdot\vec{v}=x_m-x_k\neq 0$なので，$x_1$，$x_2$，$x_3$，$x_4$の間に大小関係が生じ，その中で最大なものを$x_k$とおくと，$k$と異なるすべての$m$に対して，$x_m-x_k<0$となる。

すなわち，k と異なるすべての m に対して，$\overrightarrow{P_kP_m}\cdot\vec{v}<0$が成り立つような点$P_k$が存在する。

［解 説］

成分を用いた解を考えました。書き方がやや雑な感じもしますが……。

3

問題のページへ

$N = n^9 - n^3 = n^3(n^3 - 1)(n^3 + 1)$ より, k を整数として,

(i)　$n = 3k$ のとき

$$N = 27k^3(27k^3 - 1)(27k^3 + 1) = 9\cdot 3k^3(27k^3 - 1)(27k^3 + 1)$$

(ii)　$n = 3k + 1$ のとき

$$\begin{aligned} N &= (3k+1)^3\{(3k+1)^3 - 1\}\{(3k+1)^3 + 1\} \\ &= (3k+1)^3(27k^3 + 27k^2 + 9k)\{(3k+1)^3 + 1\} \\ &= 9(3k+1)^3(3k^3 + 3k^2 + k)\{(3k+1)^3 + 1\} \end{aligned}$$

(iii)　$n = 3k - 1$ のとき

$$\begin{aligned} N &= (3k-1)^3\{(3k-1)^3 - 1\}\{(3k-1)^3 + 1\} \\ &= (3k-1)^3\{(3k-1)^3 - 1\}(27k^3 - 27k^2 + 9k) \\ &= 9(3k-1)^3\{(3k-1)^3 - 1\}(3k^3 - 3k^2 + k) \end{aligned}$$

以上より, 任意の整数 n に対し, $N = n^9 - n^3$ は 9 で割り切れる。

[解 説]

整数を余りによって分類をするという手法で, うまく示せました。

4

問題のページへ

条件より，$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n$ ……①，$-1 < S - a_k < 1$ ($k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$) ……②

まず，$a_n \geqq 2$ と仮定する。

②において $k = 1$ のとき，$-1 < S - a_1 < 1$ なので，$-1 < a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n < 1$

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} < 1 - a_n \leqq -1 \text{ ………③}$$

①より $a_2 \leqq a_3 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}$ なので，③から $a_2 < 0$ となり，①から $a_1 \leqq a_2 < 0$

すると，③より $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} < -1$ なので，

$$S - a_n < -1$$

これは②において $k = n$ のときに反するので，$a_n < 2$ となる。

次に $a_1 \leqq -2$ と仮定する。

②において $k = n$ のとき，$-1 < S - a_n < 1$ なので，$-1 < a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} < 1$

$$1 \leqq -1 - a_1 < a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} \text{ ………④}$$

①より $a_2 \leqq a_3 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}$ なので，④から $a_{n-1} > 0$ となり，①から $0 < a_{n-1} \leqq a_n$

すると，④より $1 < a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ なので，

$$S - a_1 > 1$$

これは②において $k = 1$ のときに反するので，$a_1 > -2$ となる。

以上より，①から，すべての k について $|a_k| < 2$ が成り立つ。

［解 説］

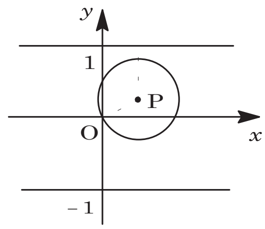
京大らしい証明問題です。$n = 2$ の場合は明らかですが，$n = 3$ や $n = 4$ の場合を考えていくと，論証の道筋が見えてきます。

5

問題のページへ

$\mathrm{P}(x,\ y)$ とおき, x 軸に関する対称性から $y \geqq 0$ とすると, 条件より,

$$\sqrt{x^2+y^2} \leqq |y-1|,\ x^2+y^2 \leqq (y-1)^2$$



まとめて, $y \leqq -\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$

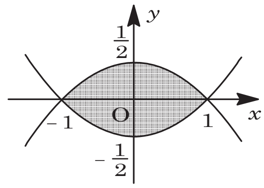
よって, $y \geqq 0$ では $0 \leqq y \leqq -\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$ となる。

また, $y \leqq 0$ では対称性より, $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2} \leqq y \leqq 0$ となる。

以上より, P が動きうる領域は,

$$\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2} \leqq y \leqq -\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$$

図示すると, 右図の網点部となる。ただし, 境界は領域に含む。



この領域の面積を S とおくと,

$$S = 2\int_{-1}^{1}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\right)dx = 2\int_{0}^{1}(-x^2+1)\,dx = \frac{4}{3}$$

[解 説]

条件を数式化していけば, 求める領域は自然に導き出されます。