

1

解答解説のページへ

xy 平面上の曲線 $C: y = x^3$ 上の点 P における接線を, P を中心にして反時計回りに 45° 回転して得られる直線を L とする。 C と L が, 相異なる 3 点で交わるような P の範囲を図示せよ。

2

解答解説のページへ

未知数 x に関する方程式 $x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - (a+1)x + a = 0$ が、虚軸上の複素数を解にもつような実数 a をすべて求めよ。

3

解答解説のページへ

整数 n に対し $f(n) = \frac{n(n-1)}{2}$ とおき、 $a_n = i^{f(n)}$ と定める。ただし、 i は虚数単位を表す。このとき、 $a_{n+k} = a_n$ が任意の整数 n に対して成り立つような正の整数 k をすべて求めよ。

4

解答解説のページへ

空間内の正八面体の頂点 P_1, P_2, \dots, P_6 とベクトル \vec{v} に対し、 $k \neq m$ のとき $\overrightarrow{P_k P_m} \cdot \vec{v} \neq 0$ が成り立っているとす。このとき、 k と異なるすべての m に対し、 $\overrightarrow{P_k P_m} \cdot \vec{v} < 0$ が成り立つような点 P_k が存在することを示せ。

5

解答解説のページへ

p を 2 以上の整数とする。2 以上の整数 n に対し、次の条件(イ), (ロ)を満たす複素数の組 (z_1, z_2, \dots, z_n) の個数を a_n とする。

(イ) $k=1, 2, \dots, n$ に対し、 $z_k^p = 1$ かつ $z_k \neq 1$

(ロ) $z_1 z_2 \cdots z_n = 1$

このとき、次の問いに答えよ。

- (1) a_3 を求めよ。
- (2) a_{n+2} を a_n, a_{n+1} の一方または両方を用いて表せ。
- (3) a_n を求めよ。

6

解答解説のページへ

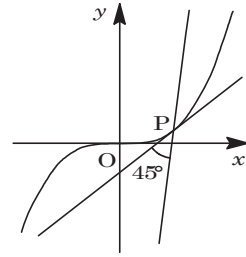
次の極限值を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\pi} e^{-x} |\sin nx| dx$$

1

問題のページへ

$C: y = x^3$ より $y' = 3x^2$ となるので、点 $P(t, t^3)$ における接線の傾きは $3t^2$ となる。この接線と x 軸の正の向きとのなす角を θ とすると、 $\tan \theta = 3t^2$ である。



また、この接線を P のまわりに 45° 回転して得られる直線 L と、 x 軸の正の向きとのなす角を φ とすると、

$$\tan \varphi = \tan(\theta + 45^\circ) = \frac{\tan \theta + \tan 45^\circ}{1 - \tan \theta \tan 45^\circ} = \frac{3t^2 + 1}{1 - 3t^2}$$

よって、 $t \neq \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき、直線 $L: y - t^3 = \frac{3t^2 + 1}{1 - 3t^2}(x - t)$

なお、 $t = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ のときは、直線 L は $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ となり、条件を満たさない。

すると、 C と L の共有点は、 $x^3 = \frac{3t^2 + 1}{1 - 3t^2}(x - t) + t^3$ より、

$$x^3 - t^3 - \frac{3t^2 + 1}{1 - 3t^2}(x - t) = 0, \quad (x - t)\left(x^2 + tx + t^2 + \frac{3t^2 + 1}{3t^2 - 1}\right) = 0$$

よって、 $x = t$ または $x^2 + tx + t^2 + \frac{3t^2 + 1}{3t^2 - 1} = 0 \dots\dots\dots ①$

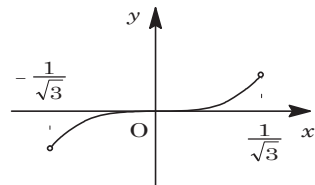
求める条件は、①が $x \neq t$ の異なる 2 実数解をもつことより、

$$t^2 + t^2 + t^2 + \frac{3t^2 + 1}{3t^2 - 1} \neq 0 \dots\dots\dots ②, \quad D = t^2 - 4\left(t^2 + \frac{3t^2 + 1}{3t^2 - 1}\right) > 0 \dots\dots\dots ③$$

②は $\frac{9t^4 + 1}{3t^2 - 1} \neq 0$ となるので、つねに成立する。

③より、 $\frac{9t^4 + 9t^2 + 4}{3t^2 - 1} < 0, \quad 3t^2 - 1 < 0$

よって、 $-\frac{1}{\sqrt{3}} < t < \frac{1}{\sqrt{3}}$ より、点 P の範囲を図示すると



右図のようになる。

[解説]

穏やかな第 1 問でした。方針に迷いが生ずることはなく、どんどん計算を進めていくことができます。

2

問題のページへ

条件より, k を実数として, $x = ki$ とおき, $x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - (a+1)x + a = 0$ に代入すると,

$$k^5 i + k^4 + k^3 i - k^2 - (a+1)ki + a = 0$$

$$(k^4 - k^2 + a) + (k^5 + k^3 - ak - k)i = 0$$

k, a が実数より,

$$k^4 - k^2 + a = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad k^5 + k^3 - ak - k = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①より $a = -k^4 + k^2$ なので, ②に代入して,

$$k^5 + k^3 - (-k^4 + k^2)k - k = 0, \quad k(2k^4 - 1) = 0$$

よって, $k = 0$ または $k^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(i) $k = 0$ のとき ①より $a = 0$

(ii) $k^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき ①より $a = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}$

(i)(ii)より, $a = 0, \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}$

[解説]

計算ミスをしなければ, 正解に到達するという基本問題です。なお, 文系に類題が出ています。

3

問題のページへ

条件より, $a_n = i^{f(n)} = \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{n(n-1)}{2}} = \cos \frac{n(n-1)}{4} \pi + i \sin \frac{n(n-1)}{4} \pi$

$$a_{n+k} = \cos \frac{(n+k)(n+k-1)}{4} \pi + i \sin \frac{(n+k)(n+k-1)}{4} \pi$$

$a_{n+k} = a_n$ なので, m を整数として,

$$\frac{(n+k)(n+k-1)}{4} \pi = 2m\pi + \frac{n(n-1)}{4} \pi$$

$$(n+k)(n+k-1) = 8m + n(n-1), \quad k(2n+k-1) = 8m \cdots \cdots (*)$$

ここで, (*) に $n=0$, $n=1$ を代入すると, $k(k-1)$, $k(k+1)$ がともに 8 の倍数となるが, $k-1$, $k+1$ がともに 8 の倍数となることはないので, k が 8 の倍数である。

逆に k が 8 の倍数であるとき, 任意の整数 n に対して (*) は明らかに成立する。

よって, 任意の整数 n に対して, ある整数 m が存在する条件は k が 8 の倍数, すなわち, $k=8l$ ($l=1, 2, 3, \dots$) である。

[解説]

式変形の結果, 得られた(*)には, とまどってしまいます。このようなときは, 必要条件を求め, そのあと十分性を確認するという流れでうまくいくことがよくあります。

4

問題のページへ

$P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2), \dots, P_6(x_6, y_6, z_6)$ とし, $\vec{v} = (1, 0, 0)$ とおいても一般性は失われない。

すると, 条件より, 任意の k, m に対して $\overrightarrow{P_k P_m} \cdot \vec{v} = x_m - x_k \neq 0$ なので, $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ の間に大小関係が生じ, その中で最大なものを x_k とおくと, k と異なるすべての m に対して, $x_m - x_k < 0$ となる。

すなわち, k と異なるすべての m に対して, $\overrightarrow{P_k P_m} \cdot \vec{v} < 0$ が成り立つような点 P_k が存在する。

[解説]

成分を用いた解を考えました。書き方がやや雑な感じもしますが……。なお, 文系に類題が出ています。

5

問題のページへ

(1) まず、 $n=2$ のとき、 $1 \leq k_1 \leq p-1$ 、 $1 \leq k_2 \leq p-1$ として、

$$z_1^p = 1 \text{ かつ } z_1 \neq 1 \text{ より、} z_1 = \cos \frac{2\pi}{p} k_1 + i \sin \frac{2\pi}{p} k_1$$

$$z_2^p = 1 \text{ かつ } z_2 \neq 1 \text{ より、} z_2 = \cos \frac{2\pi}{p} k_2 + i \sin \frac{2\pi}{p} k_2$$

$$\text{また、} z_1 z_2 = 1 \text{ より } l \text{ を整数として、} \frac{2\pi}{p} k_1 + \frac{2\pi}{p} k_2 = 2l\pi, \quad k_1 + k_2 = lp$$

$$2 \leq k_1 + k_2 \leq 2p-2 < 2p \text{ より } l=1 \text{ となるので、} k_1 + k_2 = p \cdots \cdots \textcircled{1}$$

すると、 $\textcircled{1}$ を満たす (k_1, k_2) は、 k_1 の値を決めると k_2 の値が 1 つずつ決まることより $p-1$ 組あり、 $a_2 = p-1$ である。

次に、 $n=3$ のとき、同様にして、

$$z_j = \cos \frac{2\pi}{p} k_j + i \sin \frac{2\pi}{p} k_j, \quad 1 \leq k_j \leq p-1 \quad (j=1, 2, 3)$$

$$z_1 z_2 z_3 = 1 \text{ より } l \text{ を整数として、} k_1 + k_2 + k_3 = lp \cdots \cdots \textcircled{2}$$

なお、 $3 \leq k_1 + k_2 + k_3 \leq 3p-3 < 3p$ より $l \leq 2$ となる。

すると、 $\textcircled{2}$ を満たす (k_1, k_2, k_3) は、 $k_1 + k_2 \neq p$ のとき (k_1, k_2) の値を決めると k_3 の値が 1 つずつ決まることより $(p-1)^2 - (p-1)$ 組あり、

$$a_3 = (p-1)^2 - (p-1) = (p-1)(p-2)$$

(2) (1) と同様に設定して、

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_{n+1} + k_{n+2} = lp \quad (l \leq n+1) \cdots \cdots \textcircled{3}$$

すると、 $\textcircled{3}$ を満たす $(k_1, k_2, \dots, k_{n+1}, k_{n+2})$ は、 $k_1 + k_2 + \cdots + k_{n+1} \neq lp$ のとき、 $(k_1, k_2, \dots, k_{n+1})$ の値を決めると、 k_{n+2} の値が 1 つずつ決まることより、

$$a_{n+2} = (p-1)^{n+1} - a_{n+1}$$

(3) (1)(2) より、 $a_2 = p-1$ 、 $a_{n+1} = (p-1)^n - a_n \quad (n \geq 2)$

$$\text{漸化式を変形して、} a_{n+1} - \frac{1}{p}(p-1)^{n+1} = -\left\{ a_n - \frac{1}{p}(p-1)^n \right\}$$

$$a_n - \frac{1}{p}(p-1)^n = \left\{ a_2 - \frac{1}{p}(p-1)^2 \right\} (-1)^{n-2} = \left\{ p-1 - \frac{1}{p}(p-1)^2 \right\} (-1)^{n-2}$$

$$= \frac{p-1}{p} (-1)^{n-2} = \frac{p-1}{p} (-1)^n$$

$$\text{よって、} a_n = \frac{1}{p} \left\{ (p-1)(-1)^n + (p-1)^n \right\}$$

[解説]

a_3 の値を求めることが(2)の誘導となっています。しかし、この設問からすでにややこしい、本年で一番の難問です。

6

問題のページへ

$nx = t$ とおくと, $\frac{dt}{dx} = n$ より,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{n\pi} e^{-x} |\sin nx| dx = \int_0^{n^2\pi} e^{-\frac{t}{n}} |\sin t| \frac{1}{n} dt \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n^2} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-\frac{t}{n}} |\sin t| dt = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n^2} \left| \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-\frac{t}{n}} \sin t dt \right| \end{aligned}$$

ここで, $(e^{-\frac{t}{n}} \sin t)' = -\frac{1}{n} e^{-\frac{t}{n}} \sin t + e^{-\frac{t}{n}} \cos t \cdots \cdots \textcircled{1}$

$$(e^{-\frac{t}{n}} \cos t)' = -\frac{1}{n} e^{-\frac{t}{n}} \cos t - e^{-\frac{t}{n}} \sin t \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2} \times n$ より, $(e^{-\frac{t}{n}} \sin t + ne^{-\frac{t}{n}} \cos t)' = -\frac{n^2+1}{n} e^{-\frac{t}{n}} \sin t$

$$e^{-\frac{t}{n}} \sin t = -\frac{n}{n^2+1} \left\{ e^{-\frac{t}{n}} (\sin t + n \cos t) \right\}'$$

すると, $\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-\frac{t}{n}} \sin t dt = -\frac{n}{n^2+1} \left[e^{-\frac{t}{n}} (\sin t + n \cos t) \right]_{(k-1)\pi}^{k\pi}$

$$\begin{aligned} &= -\frac{n}{n^2+1} \left\{ e^{-\frac{k\pi}{n}} n \cos k\pi - e^{-\frac{(k-1)\pi}{n}} n \cos(k-1)\pi \right\} \\ &= -\frac{n^2}{n^2+1} \left\{ e^{-\frac{k\pi}{n}} (-1)^k - e^{-\frac{(k-1)\pi}{n}} (-1)^{k-1} \right\} = -\frac{n^2}{n^2+1} (-1)^k (1 + e^{\frac{\pi}{n}}) e^{-\frac{k\pi}{n}} \end{aligned}$$

よって, $I_n = \frac{n}{n^2+1} (1 + e^{\frac{\pi}{n}}) \sum_{k=1}^{n^2} e^{-\frac{k\pi}{n}} = \frac{n}{n^2+1} (1 + e^{\frac{\pi}{n}}) \cdot \frac{e^{-\frac{\pi}{n}} (1 - e^{-\frac{\pi}{n} \cdot n^2})}{1 - e^{-\frac{\pi}{n}}}$

$$= \frac{n}{n^2+1} (1 + e^{\frac{\pi}{n}}) \cdot \frac{1 - e^{-n\pi}}{e^{\frac{\pi}{n}} - 1} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{n^2}{n^2+1} (1 + e^{\frac{\pi}{n}}) (1 - e^{-n\pi}) \cdot \frac{\frac{\pi}{n}}{e^{\frac{\pi}{n}} - 1}$$

以上より, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\pi} e^{-x} |\sin nx| dx = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{1}{\pi} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{2}{\pi}$

[解説]

積分と数列の和に関する超頻出問題です。正確な計算力がすべてです。