1

解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$の初項a_1から第 n 項a_nまでの和をS_nと表す。この数列が$a_1=0$，$a_2=1$，$(n-1)^2a_n=S_n$ $(n\geqq 1)$を満たすとき，一般項a_nを求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

四角形 ABCD を底面とする四角錐 OABCD は $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$ を満たしており, 0 と異なる 4 つの実数 p, q, r, s に対して 4 点 P, Q, R, S を

$$\overrightarrow{OP}=p\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OQ}=q\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OR}=r\overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OS}=s\overrightarrow{OD}$$

によって定める。このとき P, Q, R, S が同一平面上にあれば, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{s}$ が成立することを示せ。

3

解答解説のページへ

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+1$ は整数を係数とする x の 4 次式とする。4 次方程式 $f(x)=0$ の重複も込めた 4 つの解のうち，2 つは整数で残りの 2 つは虚数であるという。このとき a, b, c の値を求めよ。

4

解答解説のページへ

$0 \leqq \theta < 360$ とし，a は定数とする。$\cos 3\theta^\circ - \cos 2\theta^\circ + 3\cos\theta^\circ - 1 = a$ を満たす θ の値はいくつあるか。a の値によって分類せよ。

5

解答解説のページへ

4 個の整数 $1,\ a,\ b,\ c$ は $1<a<b<c$ を満たしている。これらの中から相異なる 2 個を取り出して和を作ると，$1+a$ から $b+c$ までのすべての整数の値が得られるという。$a,\ b,\ c$ の値を求めよ。

1

問題のページへ

条件より，$a_1=0$，$a_2=1$，$(n-1)^2a_n=S_n\ (n\geqq 1)$………①

$(n-2)^2a_{n-1}=S_{n-1}\ (n\geqq 2)$………②

①－②から，$(n-1)^2a_n-(n-2)^2a_{n-1}=a_n$，$n(n-2)a_n=(n-2)^2a_{n-1}$

よって, $n\geqq 3$ で，$na_n=(n-2)a_{n-1}$

$n(n-1)a_n=(n-1)(n-2)a_{n-1}$

したがって，$n(n-1)a_n=(3-1)(3-2)a_2=2$ より，$a_n=\dfrac{2}{n(n-1)}\ (n\geqq 3)$

$n=2$ をあてはめると，$a_2=\dfrac{2}{2\times 1}=1$ となり適する。

以上より，$a_1=0$，$a_n=\dfrac{2}{n(n-1)}\ (n\geqq 2)$

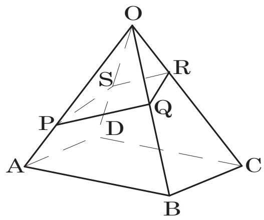
［解 説］

S_n と a_n の関係より漸化式を導きます。$n\geqq 3$ という条件に注意が必要です。

© 電送数学舎 2002

2

問題のページへ



4 点 P, Q, R, S が同一平面上にあるので, a, b を実数として,

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=a\overrightarrow{\mathrm{OP}}+b\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+(1-a-b)\overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

条件より，$s\overrightarrow{\mathrm{OD}}=ap\overrightarrow{\mathrm{OA}}+bq\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(1-a-b)r\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ なので,

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

よって，$s(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})=ap\overrightarrow{\mathrm{OA}}+bq\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(1-a-b)r\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$$(s-ap)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(-s-bq)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(s-r+ar+br)\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は 1 次独立なので,

$$s-ap=0\ \cdots\cdots\cdots①,\quad -s-bq=0\ \cdots\cdots\cdots②,\quad s-r+ar+br=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

①より $a=\dfrac{s}{p}$，②より $b=-\dfrac{s}{q}$

③に代入して，$s-r+\dfrac{sr}{p}-\dfrac{sr}{q}=0$，$\dfrac{sr}{p}+s=\dfrac{sr}{q}+r$ となり,

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{r}=\frac{1}{q}+\frac{1}{s}$$

［解　説］

4 点が同一平面上にある条件についての基本問題です。

© 電送数学舎　2002

3

問題のページへ

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+1$ のとき，$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$

まず，$f(x)=0$ の整数解は，定数項 1 の約数 ±1 だけである。

すると，条件より，$f(x)=0$ の整数解は，$x=1$ を重解にもつとき，$x=-1$ を重解にもつとき，$x=\pm1$ を解にもつときのいずれかである。

(i)　$x=1$ を重解にもつとき　$f(1)=f'(1)=0$ より，

$$1+a+b+c+1=0\cdots\cdots\cdots①,\ \ 4+3a+2b+c=0\cdots\cdots\cdots②$$

②より $c=-3a-2b-4\cdots\cdots③$，①に代入して，$-2a-b-2=0$，$b=-2a-2$

③より，$c=-3a-2(-2a-2)-4=a$

このとき，$f(x)=x^4+ax^3-(2a+2)x^2+ax+1=(x-1)^2\{x^2+(a+2)x+1\}$

となり，条件より，$x^2+(a+2)x+1=0$ が虚数解をもつことより，

$$D=(a+2)^2-4<0,\ (a+2-2)(a+2+2)<0,\ -4<a<0$$

a は整数なので，$a=-3,\ -2,\ -1$

以上より，$(a,\ b,\ c)=(-3,\ 4,\ -3),\ (-2,\ 2,\ -2),\ (-1,\ 0,\ -1)$

(ii)　$x=-1$ を重解にもつとき　$f(-1)=f'(-1)=0$ より，

$$1-a+b-c+1=0\cdots\cdots\cdots④,\ \ -4+3a-2b+c=0\cdots\cdots\cdots⑤$$

⑤より $c=-3a+2b+4\cdots\cdots⑥$，④に代入して，$2a-b-2=0$，$b=2a-2$

⑥より，$c=-3a+2(2a-2)+4=a$

このとき，$f(x)=x^4+ax^3+(2a-2)x^2+ax+1=(x+1)^2\{x^2+(a-2)x+1\}$

となり，条件より，$x^2+(a-2)x+1=0$ が虚数解をもつことより，

$$D=(a-2)^2-4<0,\ (a-2-2)(a-2+2)<0,\ 0<a<4$$

a は整数なので，$a=3,\ 2,\ 1$

以上より，$(a,\ b,\ c)=(3,\ 4,\ 3),\ (2,\ 2,\ 2),\ (1,\ 0,\ 1)$

(iii)　$x=\pm1$ を解にもつとき　$f(1)=f(-1)=0$ より，

$$1+a+b+c+1=0\cdots\cdots\cdots⑦,\ \ 1-a+b-c+1=0\cdots\cdots\cdots⑧$$

⑦⑧より $a+c=0$，$c=-a\cdots\cdots⑨$，⑦⑨より $b=-2$

このとき，$f(x)=x^4+ax^3-2x^2-ax+1=(x+1)(x-1)(x^2-ax-1)$

ところが，$x^2-ax-1=0$ の判別式 $D=a^2+4>0$ となり，$f(x)=0$ は虚数解をもたない。よって，条件に適さない。

(i)(ii)(iii)より，複号同順として，

$$(a,\ b,\ c)=(\pm3,\ 4,\ \pm3),\ (\pm2,\ 2,\ \pm2),\ (\pm1,\ 0,\ \pm1)$$

［解　説］

整数解の候補が ±1 と 2 つしかないので，ホッとします。

© 電送数学舎 2002

$\boxed{4}$

問題のページへ

$\cos 3\theta° - \cos 2\theta° + 3\cos\theta° - 1 = a$ ……①に対して，$t = \cos\theta°$ ……②とおくと，$\cos 3\theta° = 4\cos^3\theta° - 3\cos\theta° = 4t^3 - 3t$，$\cos 2\theta° = 2\cos^2\theta° - 1 = 2t^2 - 1$ より，

$$4t^3 - 3t - (2t^2 - 1) + 3t - 1 = a,\ 4t^3 - 2t^2 = a \cdots\cdots ③$$

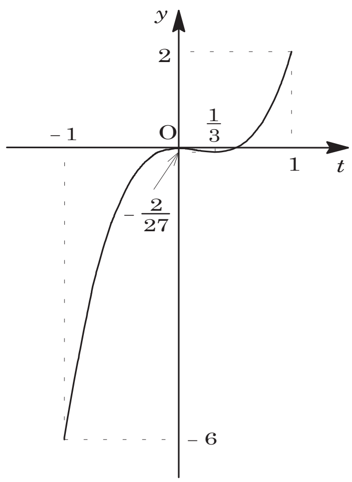
ここで，$f(t) = 4t^3 - 2t^2$ とすると，

$$f'(t) = 12t^2 - 4t = 4t(3t - 1)$$

t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	-6	↗	0	↘	$-\frac{2}{27}$	↗	2

すると，③は $f(t) = a$ となり，この解は $y = f(t)$ のグラフと $y = a$ の共有点の t 座標となる。

さて，$0 \leqq \theta < 360$ なので，②より，③の解が $t = 1$ または $t = -1$ のとき，t の値 1 個に対して①の解 θ は 1 個対応する。また，③の解が $-1 < t < 1$ のとき，t の値 1 個に対して①の解 θ は 2 個対応する。



したがって，右図より，

$a < -6$, $2 < a$ のとき θ の値は 0 個

$a = -6$，$a = 2$ のとき θ の値は 1 個

$-6 < a < -\frac{2}{27}$，$0 < a < 2$ のとき θ の値は 2 個

$a = -\frac{2}{27}$，$a = 0$ のとき θ の値は 4 個

$-\frac{2}{27} < a < 0$ のとき θ の値は 6 個

［解 説］

三角方程式の解の個数を求める頻出問題です。

© 電送数学舎 2002

5

問題のページへ

$1<a<b<c$ より，$1+a<1+b<1+c<a+c<b+c$ となる。しかも，$1+b<a+b$，$a+b<a+c$ である。すると，$1+a$ から $b+c$ までの整数の大小関係には，次の 3 つの場合がある。

(i)　$1+c<a+b$ のとき

この場合，$1+a<1+b<1+c<a+b<a+c<b+c$ となる。

条件より，$1+b=1+a+1$ ……①，$1+c=1+a+2$ ……②，$a+b=1+a+3$ ……③

$a+c=1+a+4$ ……④，$b+c=1+a+5$ ……⑤

③より $b=4$，④より $c=5$ となり，①に代入して $a=3$

この値は②，⑤を満たす。

(ii)　$1+c=a+b$ のとき

この場合，$1+a<1+b<1+c=a+b<a+c<b+c$ となる。

条件より，$1+b=1+a+1$ ……⑥，$1+c=1+a+2$ ……⑦，$a+b=1+a+2$ ……⑧

$a+c=1+a+3$ ……⑨，$b+c=1+a+4$ ……⑩

⑧より $b=3$，⑨より $c=4$ となり，⑥に代入して $a=2$

この値は⑦，⑩を満たす。

(iii)　$a+b<1+c$ のとき

この場合，$1+a<1+b<a+b<1+c<a+c<b+c$ となる。

条件より，$1+b=1+a+1$ ……⑪，$a+b=1+a+2$ ……⑫，$1+c=1+a+3$ ……⑬

$a+c=1+a+4$ ……⑭，$b+c=1+a+5$ ……⑮

⑫より $b=3$，⑭より $c=5$ となり，⑪に代入して $a=2$

この値は⑬，⑮を満たす。

(i)(ii)(iii)より，$(a,\ b,\ c)=(3,\ 4,\ 5),\ (2,\ 3,\ 4),\ (2,\ 3,\ 5)$

［解　説］

最後に京大らしい問題が出ました。1，a，b，c の中から 2 個とりだして作った 6 個の整数のうち，$a+b$ の大小関係だけが決定しません。この点に気付くのがポイントです。

© 電送数学舎 2002