1

解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$の初項a_1から第 n 項a_nまでの和をS_nと表す。この数列が$a_1=1$, $\lim_{n\to\infty} S_n=1$, $n(n-2)a_{n+1}=S_n$ $(n \geqq 1)$を満たすとき, 一般項a_nを求めよ。

2

解答解説のページへ

半径 1 の円周上に相異なる 3 点 A, B, C がある。

(1)　$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2>8$ ならば△ABC は鋭角三角形であることを示せ。

(2)　$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2\leqq 9$ が成立することを示せ。また，この等号が成立するのはどのような場合か。

3

解答解説のページへ

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+1$ は整数を係数とする x の 4 次式とする。4 次方程式 $f(x)=0$ の重複も込めた 4 つの解のうち，2 つは整数で残りの 2 つは虚数であるという。このとき a, b, c の値を求めよ。

4

解答解説のページへ

(1)　$x \geqq 0$ で定義された関数 $f(x) = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$ について，導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2)　極方程式 $r = \theta$ $(\theta \geqq 0)$ で定義される曲線の，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の部分の長さを求めよ。

5

解答解説のページへ

$a,\ b,\ c$ を実数とする。$y=x^3+3ax^2+3bx$ と $y=c$ のグラフが相異なる 3 つの交点をもつという。このとき $a^2>b$ が成立することを示し，さらにこれらの交点の x 座標のすべては開区間 $\left(-a-2\sqrt{a^2-b},\ -a+2\sqrt{a^2-b}\right)$ に含まれていることを示せ。

6

解答解説のページへ

$0<\theta<90$ とし，a は正の数とする。複素数平面上の点 z_0，z_1，z_2，$\cdots$ を次の条件(i), (ii)を満たすように定める。

(i)　$z_0=0$，$z_1=a$

(ii)　$n \geqq 1$ のとき，点 z_n-z_{n-1} を原点のまわりに $\theta°$ 回転すると点 $z_{n+1}-z_n$ に一致する。

このとき点 $z_n\ (n \geqq 1)$ が点 z_0 と一致するような n が存在するための必要十分条件は，θ が有理数であることを示せ。

1

問題のページへ

条件より，$n(n-2)a_{n+1}=S_n\ (n\geqq 1)$ ………①

$(n-1)(n-3)a_n=S_{n-1}\ (n\geqq 2)$ ………②

①−②より，$n(n-2)a_{n+1}-(n-1)(n-3)a_n=a_n$，$n(n-2)a_{n+1}=(n-2)^2a_n$

$n\geqq 3$ で，$na_{n+1}=(n-2)a_n$

$n(n-1)a_{n+1}=(n-1)(n-2)a_n$

よって，$(n-1)(n-2)a_n=(3-1)(3-2)a_3=2a_3$

$$a_n=\frac{2a_3}{(n-1)(n-2)}\ (n\geqq 3)$$

ここで，①に$n=1$を代入すると，$1\cdot(-1)a_2=S_1$，$-a_2=a_1$より，$a_2=-a_1=-1$

さて，$n\geqq 3$ で，$S_n=a_1+a_2+\sum_{k=3}^{n}a_k=1-1+\sum_{k=3}^{n}\frac{2a_3}{(k-1)(k-2)}$

$$=2a_3\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{1}{k-2}-\frac{1}{k-1}\right)=2a_3\left(1-\frac{1}{n-1}\right)$$

条件より，$\lim_{n\to\infty}S_n=1$なので，$2a_3=1$，$a_3=\frac{1}{2}$

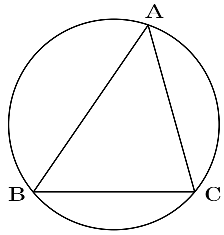
以上より，$a_1=1$，$a_2=-1$，$a_n=\frac{1}{(n-1)(n-2)}\ (n\geqq 3)$

［解　説］

①に$n=2$を代入してa_3の値を求めようとしましたが，$0\cdot a_3=0$となり，何も得られませんでした。そこで，$\lim_{n\to\infty}S_n=1$の利用となったわけです。

2　　　　問題のページへ

(1)　正弦定理より，$\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin C}=\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin A}=\dfrac{\mathrm{CA}}{\sin B}=2$



$$\mathrm{AB}=2\sin C,\ \mathrm{BC}=2\sin A,\ \mathrm{CA}=2\sin B$$

このとき，条件より $\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2>8$ なので,

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2+\mathrm{CA}^2-\mathrm{BC}^2&=\mathrm{AB}^2+\mathrm{CA}^2+\mathrm{BC}^2-2\mathrm{BC}^2\\&>8-2\mathrm{BC}^2=8-2\cdot 4\sin^2 A\\&=8(1-\sin^2 A)\geqq 0\end{aligned}$$

よって，$A<\dfrac{\pi}{2}$ となる。

同様にして，$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-\mathrm{CA}^2>8-2\mathrm{CA}^2=8(1-\sin^2 B)\geqq 0$

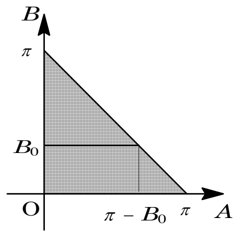
$$\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2-\mathrm{AB}^2>8-2\mathrm{AB}^2=8(1-\sin^2 C)\geqq 0$$

よって，$B<\dfrac{\pi}{2}$，$C<\dfrac{\pi}{2}$

以上より，△ABC は鋭角三角形である。

(2)　$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2&=4\sin^2 C+4\sin^2 A+4\sin^2 B\\&=4\sin^2(\pi-A-B)+4\sin^2 A+4\sin^2 B\\&=4\{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2(A+B)\}\end{aligned}$$

ここで，$P=\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2(A+B)$ とおいて，$0<A<\pi$, $0<B<\pi$，$0<A+B<\pi$ での最大値を求める。



まず, B を $0<B<\pi$ で $B=B_0$ と固定する。

次に，$0<A<\pi-B_0$ において,

$$P=\sin^2 A+\sin^2 B_0+\sin^2(A+B_0)$$

$$\frac{dP}{dA}=2\sin A\cos A+2\sin(A+B_0)\cos(A+B_0)=\sin 2A+\sin 2(A+B_0)$$

$$=2\sin\frac{2A+2A+2B_0}{2}\cos\frac{2A-2A-2B_0}{2}=2\sin(2A+B_0)\cos B_0$$

(i)　$\cos B_0>0\ \left(0<B_0<\dfrac{\pi}{2}\right)$のとき

$B_0<2A+B_0<2\pi-B_0$ において，$\dfrac{dP}{dA}=0$ となるのは，$2A+B_0=\pi$，$A=\dfrac{\pi-B_0}{2}$ のときである。

A	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi-B_0}{2}$	$\cdots$	$\pi-B_0$
$\dfrac{dP}{dA}$		$+$	0	$-$	
P	$2\sin^2 B_0$	↗		↘	$2\sin^2 B_0$

右表より $A=\dfrac{\pi-B_0}{2}$ のとき P は最大となる。

このとき，$P=\sin^2\dfrac{\pi-B_0}{2}+\sin^2 B_0+\sin^2\dfrac{\pi+B_0}{2}=2\cos^2\dfrac{B_0}{2}+\sin^2 B_0$

$$=1+\cos B_0+1-\cos^2 B_0=-\cos^2 B_0+\cos B_0+2$$

ここで，B_0 を B に戻し，$0<B<\dfrac{\pi}{2}$ で変化させると，

$$P=-\cos^2 B+\cos B+2=-\left(\cos B-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$$

$0<\cos B<1$ より，P の最大値は $\dfrac{9}{4}$ となる。

(ii)　$\cos B_0=0\left(B_0=\dfrac{\pi}{2}\right)$のとき

$$P=\sin^2 A+\sin^2\frac{\pi}{2}+\sin^2\left(A+\frac{\pi}{2}\right)=\sin^2 A+1+\cos^2 A=2$$

(iii)　$\cos B_0<0\left(\dfrac{\pi}{2}<B_0<\pi\right)$のとき

$0<A<\pi-B_0$ における P の値の増減は右表のようになり，

A	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi-B_0}{2}$	$\cdots$	$\pi-B_0$
$\dfrac{dP}{dA}$		$-$	0	$+$	
P	$2\sin^2 B_0$	$\searrow$		$\nearrow$	$2\sin^2 B_0$

$$P<2\sin^2 B_0<2$$

(i)(ii)(iii)より，$P\leqq\dfrac{9}{4}$

以上より，$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2=4P\leqq 4\cdot\dfrac{9}{4}=9$

等号が成立するのは $\cos B=\dfrac{1}{2}$ のとき，すなわち $B=\dfrac{\pi}{3}$ で，$A=\dfrac{\pi-\frac{\pi}{3}}{2}=\dfrac{\pi}{3}$ より，△ABC が正三角形の場合である。

［解　説］

(2)は，1 文字固定という考え方でていねいに解きました。本年度では一番難しい問題です。なお，(1)を利用すると，(i)の場合だけで OK です。

3　　問題のページへ

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+1$ のとき，$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$

まず，$f(x)=0$ の整数解は，定数項 1 の約数 ± 1 だけである。

すると，条件より，$f(x)=0$ の整数解は，$x=1$ を重解にもつとき，$x=-1$ を重解にもつとき，$x=\pm 1$ を解にもつときのいずれかである。

(i)　$x=1$ を重解にもつとき　$f(1)=f'(1)=0$ より，

$$1+a+b+c+1=0\cdots\cdots\cdots①,\ \ 4+3a+2b+c=0\cdots\cdots\cdots②$$

②より $c=-3a-2b-4\cdots\cdots③$，①に代入して，$-2a-b-2=0$，$b=-2a-2$

③より，$c=-3a-2(-2a-2)-4=a$

このとき，$f(x)=x^4+ax^3-(2a+2)x^2+ax+1=(x-1)^2\{x^2+(a+2)x+1\}$

となり，条件より，$x^2+(a+2)x+1=0$ が虚数解をもつことより，

$$D=(a+2)^2-4<0,\ (a+2-2)(a+2+2)<0,\ -4<a<0$$

a は整数なので，$a=-3,\ -2,\ -1$

以上より，$(a,\ b,\ c)=(-3,\ 4,\ -3),\ (-2,\ 2,\ -2),\ (-1,\ 0,\ -1)$

(ii)　$x=-1$ を重解にもつとき　$f(-1)=f'(-1)=0$ より，

$$1-a+b-c+1=0\cdots\cdots\cdots④,\ \ -4+3a-2b+c=0\cdots\cdots\cdots⑤$$

⑤より $c=-3a+2b+4\cdots\cdots⑥$，④に代入して，$2a-b-2=0$，$b=2a-2$

⑥より，$c=-3a+2(2a-2)+4=a$

このとき，$f(x)=x^4+ax^3+(2a-2)x^2+ax+1=(x+1)^2\{x^2+(a-2)x+1\}$

となり，条件より，$x^2+(a-2)x+1=0$ が虚数解をもつことより，

$$D=(a-2)^2-4<0,\ (a-2-2)(a-2+2)<0,\ 0<a<4$$

a は整数なので，$a=3,\ 2,\ 1$

以上より，$(a,\ b,\ c)=(3,\ 4,\ 3),\ (2,\ 2,\ 2),\ (1,\ 0,\ 1)$

(iii)　$x=\pm 1$ を解にもつとき　$f(1)=f(-1)=0$ より，

$$1+a+b+c+1=0\cdots\cdots\cdots⑦,\ \ 1-a+b-c+1=0\cdots\cdots\cdots⑧$$

⑦⑧より $a+c=0$，$c=-a\cdots\cdots⑨$，⑦⑨より $b=-2$

このとき，$f(x)=x^4+ax^3-2x^2-ax+1=(x+1)(x-1)(x^2-ax-1)$

ところが，$x^2-ax-1=0$ の判別式 $D=a^2+4>0$ となり，$f(x)=0$ は虚数解をもたない。よって，条件に適さない。

(i)(ii)(iii)より，複号同順として，

$$(a,\ b,\ c)=(\pm 3,\ 4,\ \pm 3),\ (\pm 2,\ 2,\ \pm 2),\ (\pm 1,\ 0,\ \pm 1)$$

［解　説］

整数解の候補が ± 1 と 2 つしかないので，ホッとします。

4

問題のページへ

(1)　$f(x)=\log(x+\sqrt{1+x^2})$ に対して，

$$f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

(2)　曲線 $r=\theta$ 上の点を $(x,\ y)$ とすると，$x=r\cos\theta=\theta\cos\theta$，$y=r\sin\theta=\theta\sin\theta$

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=(\cos\theta-\theta\sin\theta)^2+(\sin\theta+\theta\cos\theta)^2=1+\theta^2$$

曲線 $r=\theta$ の $0\leqq\theta\leqq\pi$ の部分の長さを l とすると，

$$l=\int_0^\pi\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta=\left[\theta\sqrt{1+\theta^2}\right]_0^\pi-\int_0^\pi\theta\cdot\frac{2\theta}{2\sqrt{1+\theta^2}}\,d\theta$$

$$=\pi\sqrt{1+\pi^2}-\int_0^\pi\frac{1+\theta^2-1}{\sqrt{1+\theta^2}}\,d\theta=\pi\sqrt{1+\pi^2}-\int_0^\pi\left(\sqrt{1+\theta^2}-\frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}\right)d\theta$$

$$=\pi\sqrt{1+\pi^2}-l+\left[\log(\theta+\sqrt{1+\theta^2})\right]_0^\pi=\pi\sqrt{1+\pi^2}-l+\log(\pi+\sqrt{1+\pi^2})$$

$$2l=\pi\sqrt{1+\pi^2}+\log(\pi+\sqrt{1+\pi^2})$$

よって，$l=\dfrac{1}{2}\pi\sqrt{1+\pi^2}+\dfrac{1}{2}\log(\pi+\sqrt{1+\pi^2})$

［解 説］

(2)の部分積分による計算は有名なものですが，経験がないと無理でしょう。

5

問題のページへ

$y = x^3 + 3ax^2 + 3bx$ ……①に対して，$y' = 3x^2 + 6ax + 3b = 3(x^2 + 2ax + b)$

$y' = 0$ の判別式 $D/4 = a^2 - b$ より，$a^2 > b$ のときは $y' = 0$ は 2 つの異なる実数解 $x = -a \pm \sqrt{a^2 - b}$ をもち，これを $x = \alpha,\ \beta\ (\alpha < \beta)$ とすると，①のグラフ増減は右表のようになる。

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗		↘		↗

これより，ある c に対して，①と $y = c$ のグラフは相異なる 3 つの交点をもつ。

また，$a^2 \leqq b$ のときは $y' \geqq 0$ となり，①は単調増加関数になる。これより，どんな c をとっても，①と $y = c$ のグラフは 1 個の共有点しかもたない。

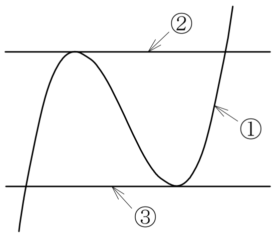
以上より，①と $y = c$ のグラフが相異なる 3 つの交点をもつ条件は，$a^2 > b$ である。

さて，$a^2 > b$ のとき，①と $y = \alpha^3 + 3a\alpha^2 + 3b\alpha$ ……②のグラフの共有点は，

$$x^3 + 3ax^2 + 3bx = \alpha^3 + 3a\alpha^2 + 3b\alpha$$
$$(x - \alpha)^2(x + 2\alpha + 3a) = 0$$
$$x = \alpha,\quad x = -2\alpha + 3a$$

同様にして，①と $y = \beta^3 + 3a\beta^2 + 3b\beta$ ……③のグラフの共有点は，

$$x = \beta,\quad x = -2\beta + 3a$$



右図より，①と $y = c$ のグラフが相異なる 3 つの交点をもつとき，これらの交点の x 座標のすべては，開区間 $(-2\beta + 3a,\ -2\alpha + 3a) = \left(-a - 2\sqrt{a^2 - b},\ -a + 2\sqrt{a^2 - b}\right)$ に含まれている。

[解 説]

3 次関数のグラフについての文系風の基本問題です。

6

問題のページへ

$z_n - z_{n-1} = w_n$ とおき，$\alpha = \cos\theta° + i\sin\theta°$ とすると，条件(ii)より，

$$w_{n+1} = \alpha w_n,$$

条件(i)より $z_0 = 0$，$z_1 = a$ なので，$w_n = w_1\alpha^{n-1} = (a-0)\alpha^{n-1} = a\alpha^{n-1}$

よって，$z_n - z_{n-1} = a\alpha^{n-1}$

$$z_n = z_0 + (a + a\alpha + a\alpha^2 + \cdots + a\alpha^{n-1}) = a + a\alpha + a\alpha^2 + \cdots + a\alpha^{n-1}$$

$\alpha = 1$ のときは，$z_n = na$ となり，$a > 0$ から $z_n = z_0 = 0$ となる場合はない。

$\alpha \neq 1$ のときは，$z_n = \dfrac{a(1-\alpha^n)}{1-\alpha}$ であるので，$z_n = z_0 = 0$ となる条件は $\alpha^n = 1$

$$\cos(n\theta)° + i\sin(n\theta)° = 1$$

すなわち，m を整数として，$n\theta = 360 \times m$ である。

すると，$\theta = \dfrac{360m}{n}$ となり，θ は有理数である。

逆に，θ が有理数ならば $\theta = \dfrac{q}{p}$ とおけ，$n = 360p$ を満たす n に対して，

$$\cos(n\theta)° + i\sin(n\theta)° = \cos\left(\frac{nq}{p}\right)° + i\sin\left(\frac{nq}{p}\right)°$$
$$= \cos(360q)° + i\sin(360q)° = 1$$

よって，$z_n = z_0 = 0$ となる。

以上より，$z_n = z_0 = 0$ となる n が存在するための必要十分条件は，θ が有理数ということである。

［解 説］

公比が虚数の等比数列と複素数平面上における点の回転を融合した頻出問題です。