1

解答解説のページへ

$\dfrac{23}{111}$ を $0.a_1a_2a_3a_4\cdots$ のように小数で表す。すなわち小数第 k 位の数を a_k とする。このとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{3^k}$ を求めよ。

2

解答解説のページへ

xy 平面上で，放物線 $C : y = x^2 + x$ と，直線 $l : y = kx + k - 1$ を考える。このとき次の問いに答えよ。

(1) 放物線 C と直線 l が相異なる 2 点で交わるような k の範囲を求めよ。

(2) 放物線 C と直線 l の 2 つの交点を P，Q とし，線分 PQ の長さを L，線分 PQ と放物線とで囲まれる部分の面積を S とする。k が(1)で定まる範囲を動くとき，$\dfrac{S}{L^3}$ の値のとりうる範囲を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

四面体 OABC は次の 2 つの条件

(i)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$

(ii)　4 つの面の面積がすべて等しい

を満たしている。このとき，この四面体は正四面体であることを示せ。

4

解答解説のページへ

p は 3 以上の素数であり，x，y は $0 \leqq x \leqq p$，$0 \leqq y \leqq p$ を満たす整数であるとする。このとき x^2 を $2p$ で割った余りと，y^2 を $2p$ で割った余りが等しければ，$x = y$ であることを示せ。

5

解答解説のページへ

4 チームがリーグ戦を行う。すなわち，各チームは他のすべてのチームとそれぞれ 1 回ずつ対戦する。引き分けはないものとし，勝つ確率はすべて $\frac{1}{2}$ で，各回の勝敗は独立に決まるものとする。勝ち数の多い順に順位をつけ，勝ち数が同じであればそれらは同順位とする。1 位のチーム数の期待値を求めよ。

1

問題のページへ

$\dfrac{23}{111}=0.\dot{2}0\dot{7}$より，$l \geqq 1$として，$a_{3l-2}=2$，$a_{3l-1}=0$，$a_{3l}=7$である。

(i)　$n=3l\ \left(l=\dfrac{n}{3}\right)$のとき

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{3^k}=\sum_{k=1}^{l}\left(\frac{a_{3k-2}}{3^{3k-2}}+\frac{a_{3k-1}}{3^{3k-1}}+\frac{a_{3k}}{3^{3k}}\right)=\sum_{k=1}^{l}2\left(\frac{1}{3}\right)^{3k-2}+\sum_{k=1}^{l}7\left(\frac{1}{3}\right)^{3k}$$
$$=\sum_{k=1}^{l}18\left(\frac{1}{27}\right)^{k}+\sum_{k=1}^{l}7\left(\frac{1}{27}\right)^{k}=25\sum_{k=1}^{l}\left(\frac{1}{27}\right)^{k}$$
$$=25\cdot\frac{\frac{1}{27}\left\{1-\left(\frac{1}{27}\right)^{l}\right\}}{1-\frac{1}{27}}=\frac{25}{26}\left\{1-\left(\frac{1}{27}\right)^{l}\right\}=\frac{25}{26}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right\}$$

(ii)　$n=3l-1\ \left(l=\dfrac{n+1}{3}\right)$のとき

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{3^k}=\frac{25}{26}\left\{1-\left(\frac{1}{27}\right)^{l}\right\}-\frac{a_{3l}}{3^{3l}}=\frac{25}{26}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right\}-\frac{7}{3^{n+1}}$$
$$=\frac{25}{26}-\frac{207}{26}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}=\frac{25}{26}-\frac{23}{26}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

(iii)　$n=3l-2\ \left(l=\dfrac{n+2}{3}\right)$のとき

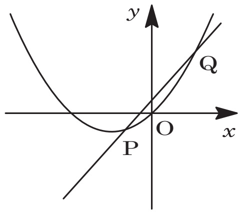
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{3^k}=\frac{25}{26}\left\{1-\left(\frac{1}{27}\right)^{l}\right\}-\frac{a_{3l}}{3^{3l}}-\frac{a_{3l-1}}{3^{3l-1}}=\frac{25}{26}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2}\right\}-\frac{7}{3^{n+2}}$$
$$=\frac{25}{26}-\frac{207}{26}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2}=\frac{25}{26}-\frac{23}{26}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

［解 説］

数列$\{a_n\}$の周期が 3 であるため，nを 3 で割った余りで場合分けをしています。どの場合も，いったんlで計算したのちnに置きかえるという方法で解いています。

2

問題のページへ



(1)　$C : y = x^2 + x$ ……①，$l : y = kx + k - 1$ ……②が相異なる2点で交わるのは，$x^2 + x = kx + k - 1$として，

$$x^2 - (k-1)x - (k-1) = 0 \cdots\cdots\cdots ③$$

③が異なる2実数解をもつことより，

$$D = (k-1)^2 + 4(k-1) > 0$$

$(k-1)(k+3) > 0$より，$k < -3$，$1 < k$

(2)　③の解を$x = \alpha$，β $(\alpha < \beta)$とすると，2交点を$(\alpha,\ k\alpha + k - 1)$，$(\beta,\ k\beta + k - 1)$とおくことができるので，

$$L = \sqrt{(\beta - \alpha)^2 + (k\beta + k - 1 - k\alpha - k + 1)^2} = \sqrt{1 + k^2}\,(\beta - \alpha)$$

$$S = \int_\alpha^\beta (kx + k - 1 - x^2 - x)\,dx = -\int_\alpha^\beta (x - \alpha)(x - \beta)\,dx = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$$

よって，$\dfrac{S}{L^3} = \dfrac{(\beta - \alpha)^3}{6\left(\sqrt{1 + k^2}\right)^3(\beta - \alpha)^3} = \dfrac{1}{6\left(\sqrt{1 + k^2}\right)^3}$

ここで(1)より，$k < -3$，$1 < k$なので，$1 + k^2 > 2$となり，

$$0 < \frac{S}{L^3} < \frac{1}{6(\sqrt{2})^3} = \frac{\sqrt{2}}{24}$$

[解 説]

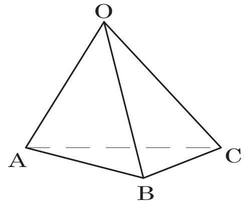
本年度5題中，最も基本的な問題です。落とすことはできません。

3

問題のページへ

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおくと，条件(i)より，

$$\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0\,,\ \vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$\vec{b}\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0\,,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{a}$$
$$\vec{c}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0\,,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$$



まとめて，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=k$……①とおく。

また，条件(ii)より，$\triangle\mathrm{OAB}=\triangle\mathrm{OBC}=\triangle\mathrm{OCA}$ から，

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2-(\vec{b}\cdot\vec{c})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{c}|^2|\vec{a}|^2-(\vec{c}\cdot\vec{a})^2}$$

①より，$|\vec{a}||\vec{b}|=|\vec{b}||\vec{c}|=|\vec{c}||\vec{a}|$

まとめて，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=l$……②とおく。

ここで，①②より，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=l^2-2k+l^2=2(l^2-k)$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=|\vec{c}-\vec{a}|^2=l^2-2k+l^2=2(l^2-k)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(\vec{b}-\vec{a})(\vec{c}-\vec{a})=k-k-k+l^2=l^2-k$$

すると，$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$ より，

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{4(l^2-k)^2-(l^2-k)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{3(l^2-k)^2}$$

さらに，$\triangle\mathrm{ABC}=\triangle\mathrm{OAB}$ より，$\frac{1}{2}\sqrt{3(l^2-k)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{l^4-k^2}$

$$3(l^2-k)^2=(l^2-k)(l^2+k)\,,\ 3(l^2-k)=l^2+k\,,\ l^2=2k\text{………③}$$

③より，$\cos\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{k}{l^2}=\dfrac{1}{2}$ から，$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$ となる。

同様にして，$\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=60^\circ$ なので，$\triangle\mathrm{OAB}$，$\triangle\mathrm{OBC}$，$\triangle\mathrm{OCA}$ は正三角形となり，四面体 OABC は正四面体である。

［解 説］

頂角が 60° の二等辺三角形は正三角形という方針で解をつくりました。

4

問題のページへ

x^2 を $2p$ で割った余りと，y^2 を $2p$ で割った余りが等しいので, k を整数として,

$$x^2-y^2=2pk\ ,\ \ (x+y)(x-y)=2pk\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

よって, p が素数より，$x+y$ または $x-y$ は p の倍数となる。

また, $0\leqq x\leqq p$, $0\leqq y\leqq p$ より，$0\leqq x+y\leqq 2p$，$-p\leqq x-y\leqq p$ である。

(i)　$x+y$ が p の倍数であるとき

$x+y=0$ のとき，$x=y=0$ である。

$x+y=p$ のとき，$(*)$より $x-y=2k$ である。ここで，p は 3 以上の素数なので $x+y$ は奇数であり，また $x-y$ は偶数である。ところが，一般的に $x+y$ と $x-y$ の偶奇は一致するので，この場合は不適である。

$x+y=2p$ のとき，$x=y=p$ である。

(ii)　$x-y$ が p の倍数であるとき

$x-y=-p$ のとき，$(*)$より $x+y=-2k$ である。すると，$x-y$ は奇数，$x+y$ は偶数となり，不適である。

$x-y=0$ のとき，$x=y$ である。

$x-y=p$ のとき，$(*)$より $x+y=2k$ である。すると，$x-y$ は奇数，$x+y$ は偶数となり，不適である。

(i)(ii)より，いずれの場合も $x=y$ である。

[解 説]

京大に特徴的な整数問題，今年もまた出ました。

5

問題のページへ

試合数は全部で${}_4C_2=6$なので，あるチーム が 3 勝 0 敗の場合は，他のチームはすべて 2 勝以下となる。

次に，あるチームが 2 勝 1 敗の場合は，他のチームがすべて 1 勝以下ということはありえないので, 2 勝 1 敗のチーム数は 2 または 3 となる。

まず，2 勝 1 敗のチーム数が 2 のとき，残り 2 チームはともに 1 勝 2 敗となる。また, 2 勝 1 敗のチーム数が 3 のとき，残りのチームは 0 勝 3 敗である。

さらに, 4 チームとも同じ勝ち数という場合はないので, 1 位のチーム数は 1, 2, 3 のいずれかである。以下，チーム名を A, B, C, D とする。

(i)　1 位のチーム数が 1 のとき

まず, 1 位のチームの選び方は${}_4C_1=4$通りある。

ここで，1 位のチームが A のとき，A は B，C，D に対して全勝となり，また B，C，D どうしの対戦での勝敗は任意なので，その確率は，$4\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{2}$である。

(ii)　1 位のチーム数が 3 のとき

まず, 1 位のチームの選び方は${}_4C_3=4$通りある。

ここで, 1 位のチームが A, B, C のとき, D は A, B, C に対して全敗となり, A, B, C どうしの対戦での勝敗は, A, B, C すべて 1 勝 1 敗なので，勝ちを○，負けを×で表すと，次の 2 つの場合がある。

(A,　B) = (○,　×)，(B,　C) = (○,　×)，(C,　A) = (○,　×)

(A,　B) = (×,　○)，(B,　C) = (×,　○)，(C,　A) = (×,　○)

よって，その確率は，$4\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times 2=\frac{1}{8}$である。

(iii)　1 位のチーム数が 2 のとき

(i)(ii)より，その確率は，$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$である。

以上より, 1 位のチーム数の期待値は，$1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{13}{8}$である。

［解　説］

1 位のチーム数が 2 のときがいちばん複雑そうでしたので，この場合は余事象で考えました。