

1

解答解説のページへ

正の数からなる数列 $\{a_n\}$ が次の条件(i), (ii)を満たすとき, $\sum_{k=1}^n a_k$ を求めよ。

(i) $a_1 = 1$

(ii) $\log a_n - \log a_{n-1} = \log(n-1) - \log(n+1) \quad (n \geq 2)$

2

解答解説のページへ

$f(x) = x \sin x (x \geq 0)$ とする。点 $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ における $y = f(x)$ の法線と、 $y = f(x)$ のグラフの $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の部分、および y 軸とで囲まれる図形を考える。この図形を x 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積を求めよ。

3

解答解説のページへ

四面体 $OABC$ は次の 2 つの条件

(i) $OA \perp BC$, $OB \perp AC$, $OC \perp AB$

(ii) 4 つの面の面積がすべて等しい

を満たしている。このとき、この四面体は正四面体であることを示せ。

4

解答解説のページへ

多項式 $(x^{100} + 1)^{100} + (x^2 + 1)^{100} + 1$ は多項式 $x^2 + x + 1$ で割り切れるか。

5

解答解説のページへ

a, b, c, d を実数とする。2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と 2 次の単位行列 E に対して、集合 $L(A)$ を $L(A) = \{rE + sA \mid r, s \text{ は実数}\}$ とする。このとき次の条件(*)が成立するための、 a, b, c, d についての必要十分条件を求めよ。

(*) $L(A)$ の要素 B は零行列でなければ逆行列をもつ

6

解答解説のページへ

n チームがリーグ戦を行う。すなわち、各チームは他のすべてのチームとそれぞれ 1 回ずつ対戦する。引き分けはないものとし、勝つ確率はすべて $\frac{1}{2}$ で、各回の勝敗は独立に決まるものとする。このとき、 $n-2$ 勝 1 敗のチームがちょうど 2 チームである確率を求めよ。ただし、 n は 3 以上とする。

1

問題のページへ

条件より, $\log \frac{a_n}{a_{n-1}} = \log \frac{n-1}{n+1}$ なので, $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n-1}{n+1}$

$$(n+1)a_n = (n-1)a_{n-1}, \quad n(n+1)a_n = (n-1)na_{n-1}$$

よって, $n(n+1)a_n = 1 \cdot 2 \cdot a_1 = 2$ から, $a_n = \frac{2}{n(n+1)}$

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+1)} = 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{2n}{n+1}$$

[解説]

昨年より基本的な問題で, すっきり解けます。漸化式の両辺に n をかける変形もよく見かけます。

2

問題のページへ

$f(x) = x \sin x$ より, $f'(x) = \sin x + x \cos x$

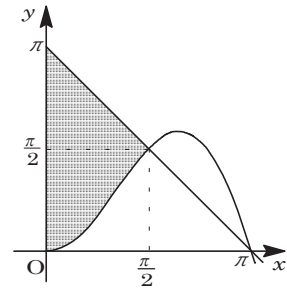
$f'(\frac{\pi}{2}) = 1$ より, 点 $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ における $y = f(x)$ の法線

の傾きは -1 となり, その方程式は,

$$y - \frac{\pi}{2} = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right), \quad y = -x + \pi$$

求める回転体の体積を V とすると,

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-x + \pi)^2 dx - \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2 x dx \\ &= -\frac{\pi}{3} \left[(-x + \pi)^3 \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 - x^2 \cos 2x) dx \\ &= \frac{7}{24} \pi^4 - \frac{\pi}{6} \left[x^3 \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{1}{2} \left[x^2 \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx \right\} \\ &= \frac{7}{24} \pi^4 - \frac{\pi^4}{48} - \frac{\pi}{2} \left\{ -\frac{1}{2} \left[x \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx \right\} \\ &= \frac{13}{48} \pi^4 - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{13}{48} \pi^4 - \frac{\pi^2}{8} \end{aligned}$$



[解説]

計算ミスに注意することが, 最大のポイントです。

3

問題のページへ

$\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ とおくと, 条件(i)より,

$$\vec{a} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = 0, \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\vec{b} \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = 0, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\vec{c} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a}$$

まとめて, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = k \cdots \cdots \textcircled{1}$ とおく。

また, 条件(ii)より, $\triangle OAB = \triangle OBC = \triangle OCA$ から,

$$\frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{b}|^2 |\vec{c}|^2 - (\vec{b} \cdot \vec{c})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{c}|^2 |\vec{a}|^2 - (\vec{c} \cdot \vec{a})^2}$$

$\textcircled{1}$ より, $|\vec{a}| |\vec{b}| = |\vec{b}| |\vec{c}| = |\vec{c}| |\vec{a}|$

まとめて, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = l \cdots \cdots \textcircled{2}$ とおく。

ここで, $\textcircled{1}\textcircled{2}$ より, $|\vec{AB}|^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2 = l^2 - 2k + l^2 = 2(l^2 - k)$

$$|\vec{AC}|^2 = |\vec{c} - \vec{a}|^2 = l^2 - 2k + l^2 = 2(l^2 - k)$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (\vec{b} - \vec{a})(\vec{c} - \vec{a}) = k - k - k + l^2 = l^2 - k$$

すると, $\triangle ABC = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{AB}|^2 |\vec{AC}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2}$ より,

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \sqrt{4(l^2 - k)^2 - (l^2 - k)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{3(l^2 - k)^2}$$

さらに, $\triangle ABC = \triangle OAB$ より, $\frac{1}{2} \sqrt{3(l^2 - k)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{l^4 - k^2}$

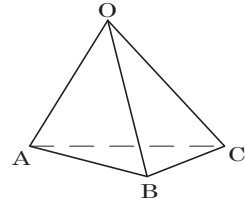
$$3(l^2 - k)^2 = (l^2 - k)(l^2 + k), \quad 3(l^2 - k) = l^2 + k, \quad l^2 = 2k \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{3}$ より, $\cos \angle AOB = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{k}{l^2} = \frac{1}{2}$ から, $\angle AOB = 60^\circ$ となる。

同様にして, $\angle BOC = \angle COA = 60^\circ$ なので, $\triangle OAB$, $\triangle OBC$, $\triangle OCA$ は正三角形となり, 四面体 OABC は正四面体である。

[解説]

頂角が 60° の二等辺三角形は正三角形という方針で解をつくりました。



4

問題のページへ

$x^2 + x + 1 = 0$ の解は $x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ より, $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} = \cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi$ とおくと,

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

また, $\omega^2 = \cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ となるので,

$$x^2 + x + 1 = (x - \omega)(x - \omega^2) \cdots \cdots \textcircled{2}$$

さらに, $\omega^3 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1 \cdots \cdots \textcircled{3}$

ここで, $f(x) = (x^{100} + 1)^{100} + (x^2 + 1)^{100} + 1$ とおくと, ①③より,

$$\begin{aligned} f(\omega) &= (\omega^{100} + 1)^{100} + (\omega^2 + 1)^{100} + 1 = (\omega + 1)^{100} + (-\omega)^{100} + 1 \\ &= (-\omega^2)^{100} + \omega^{100} + 1 = \omega^{200} + \omega + 1 = \omega^2 + \omega + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\omega^2) &= (\omega^{200} + 1)^{100} + (\omega^4 + 1)^{100} + 1 = (\omega^2 + 1)^{100} + (\omega + 1)^{100} + 1 \\ &= (-\omega)^{100} + (-\omega^2)^{100} + 1 = \omega^{100} + \omega^{200} + 1 = \omega + \omega^2 + 1 = 0 \end{aligned}$$

よって, ②より $f(x)$ は $x^2 + x + 1$ で割り切れる。

[解説]

有名な 1 の虚立方根の問題です。次数の高い式の値を求めるのも、全く気になりません。

5

問題のページへ

k を実数として、 A が E の実数倍かどうかで場合分けをする。

(i) $A = kE$ のとき

$$B = rE + sA = rE + skE = (r + sk)E$$

$B \neq O$ ならば $r + sk \neq 0$ となり、 B は逆行列 $B^{-1} = \frac{1}{r + sk}E$ をつねにもつ。

すなわち(*)が成立する条件は、 $a = d$ かつ $b = c = 0$ である。

(ii) $A \neq kE$ のとき

$B = rE + sA$ において、 $B = O$ と $r = s = 0$ は同値なので、 $B \neq O$ は $r \neq 0$ または $s \neq 0$ と等しい。

まず、 $s = 0$ のときは $B \neq O$ より $r \neq 0$ となり、 $B = rE$ は逆行列 $B^{-1} = \frac{1}{r}E$ をつねにもつ。

次に、 $s \neq 0$ のときは $B \neq O$ である。

ここで、 B の行列式を $\det B$ とおくと、逆行列 B^{-1} が存在する条件は、任意の実数 $r, s (s \neq 0)$ に対して、 $\det B \neq 0$ である。

さて、 $B = \begin{pmatrix} r + sa & sb \\ sc & r + sd \end{pmatrix}$ より、

$$\det B = (r + sa)(r + sd) - s^2bc = r^2 + s(a + d)r + s^2(ad - bc)$$

$\det B = 0$ を r の 2 次方程式とみて、その判別式を D とすると、求める条件は、

$$D = s^2(a + d)^2 - 4s^2(ad - bc) = s^2\{(a + d)^2 - 4(ad - bc)\} < 0$$

$s^2 > 0$ より、 $(a + d)^2 - 4(ad - bc) < 0$ 、 $(a + d)^2 < 4(ad - bc)$

このとき、 A は E の実数倍とはならない。

(i)(ii)より、(*)が成立する条件は $a = d$ かつ $b = c = 0$ または $(a + d)^2 < 4(ad - bc)$

[解説]

A と E が 1 次独立でないかどうかで場合分けをしました。しかし、この考え方は馴染みの薄いものでしょう。

6

問題のページへ

n チームを $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots, A_n$ とし, 以下 A_1 と A_2 が $n-2$ 勝 1 敗する場合を考える。

まず, A_1 と A_2 が対戦して, A_1 が勝ち, A_2 が負ける確率は $\frac{1}{2}$ である。

このとき, A_1 は残りの試合で $A_3 \sim A_n$ と対戦して $n-3$ 勝 1 敗, A_2 は残りの試合で $A_3 \sim A_n$ と対戦して $n-2$ 勝 0 敗でなくてはならない。この確率は,

$${}_{n-2}C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} \cdot \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = (n-2) \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-4}$$

ところで, A_1 が $A_3 \sim A_n$ と対戦して 1 敗するチームが A_3 の場合, A_3 については A_2 との対戦で 1 敗しているので, 他の $A_4 \sim A_n$ との対戦で少なくとも 1 敗しなくては, A_1 と A_2 だけが $n-2$ 勝 1 敗とはならない。この確率は, $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$ となる。

また, A_4, \dots, A_n に対しては, A_1, A_2 との対戦で既に 2 敗しているので, 勝敗は任意で条件に適する。

以上まとめると, A_1 と A_2 が対戦して A_1 が勝ち, A_2 が負け, しかも A_1 と A_2 がともに $n-2$ 勝 1 敗の確率は,

$$\frac{1}{2} \times (n-2) \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-4} \times \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\right\} = (n-2) \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-3} \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\right\}$$

次に, A_1 が負け, A_2 が勝つときも同様であり, また $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots, A_n$ の中で, $n-2$ 勝 1 敗の 2 チームの選び方は ${}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{2}$ 通りあるので, 求める確率は,

$$(n-2) \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-3} \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\right\} \times 2 \times \frac{n(n-1)}{2} = n(n-1)(n-2) \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-3} \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\right\}$$

となる。

[解説]

文系にも類題があります。その類題では, 余事象を利用してを求めたややこしい確率が, 理系で出題されています。