1

解答解説のページへ

$f(\theta) = \cos 4\theta - 4\sin^2\theta$ とする。$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ における $f(\theta)$ の最大値および最小値を求めよ。

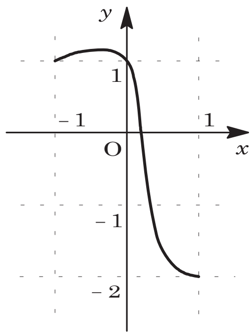
2

解答解説のページへ

区間$-1 \leqq x \leqq 1$で定義された関数$f(x)$が,

$$f(-1)=f(0)=1,\ f(1)=-2$$

を満たし，またそのグラフが右図のようになっているという。



このとき，$\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \geqq -1$を示せ。

3

解答解説のページへ

△OAB において，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$とする。$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=5$，$\cos(\angle\mathrm{AOB})=\dfrac{3}{5}$とする。このとき，∠AOB の二等分線と，B を中心とする半径$\sqrt{10}$の円との交点の，O を原点とする位置ベクトルを，$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ。

4

解答解説のページへ

c を実数とする。x についての 2 次方程式 $x^2+(3-2c)x+c^2+5=0$ が 2 つの解 α，β をもつとする。複素平面上の 3 点 α，β，c^2 が三角形の 3 頂点になり，その三角形の重心は 0 であるという。c を求めよ。

5

解答解説のページへ

$n,\ a,\ b$ を 0 以上の整数とする。$a,\ b$ を未知数とする方程式

$$(*)\quad a^2+b^2=2^n$$

を考える。

(1)　$n\geqq 2$ とする。$a,\ b$ が方程式$(*)$を満たすならば，$a,\ b$ はともに偶数であることを証明せよ。（ただし，0 は偶数に含める。）

(2)　0 以上の整数 n に対して，方程式$(*)$を満たす 0 以上の整数の組$(a,\ b)$をすべて求めよ。

1

問題のページへ

$f(\theta)=\cos 4\theta-4\sin^2\theta=2\cos^2 2\theta-1-4\cdot\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}=2\cos^2 2\theta+2\cos 2\theta-3$ より，

$$f(\theta)=2\left(\cos 2\theta+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{2}$$

$0°\leqq\theta\leqq 90°$ から，$-1\leqq\cos 2\theta\leqq 1$ となる。

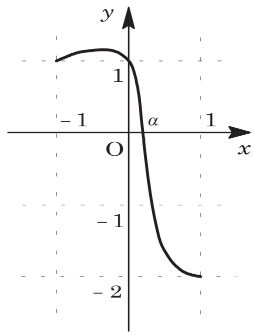
よって，$f(\theta)$ は $\cos 2\theta=-\dfrac{1}{2}$ $(\theta=60°)$ のとき最小値 $-\dfrac{7}{2}$ をとる。また $\cos 2\theta=1$ $(\theta=0°)$ のとき最大値 1 をとる。

［解 説］

理系の類題では微分法を利用しましたが，文系では平方完成を用いる解法になります。

2

問題のページへ



$y=f(x)$ のグラフは $-1\leqq x\leqq 1$ で連続であり，x 軸との交点を $x=\alpha$ とすると，$0<\alpha<1$ となる。

右図より，$-1<x<\alpha$ で $f(x)>0$，$-1<x<0$ で $f(x)>1$ となっているので，

$$\int_{-1}^{\alpha} f(x)\,dx > \int_{-1}^{0} f(x)\,dx > \int_{-1}^{0} dx = 1 \cdots\cdots\cdots①$$

また，$\alpha<x<1$ で $f(x)>-2$ より，

$$\int_{\alpha}^{1} f(x)\,dx > \int_{\alpha}^{1} (-2)\,dx = -2(1-\alpha) \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，

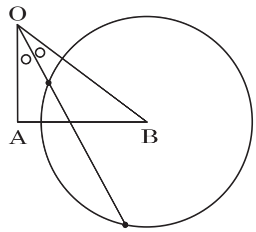
$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{\alpha} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{1} f(x)\,dx > 1-2(1-\alpha) = -1+2\alpha > -1$$

［解 説］

定性的な問題で，昨年の名大・理系の選択題を思い出しました。符号付きの面積を考えると，結論が見えてきます。

3

問題のページへ



$\angle$AOB の二等分線と, B を中心とする半径 $\sqrt{10}$ の円との交点を P とおくと, $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$ より, k を実数として,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\left(\frac{\vec{a}}{3}+\frac{\vec{b}}{5}\right)=l(5\vec{a}+3\vec{b})\quad\left(l=\frac{k}{15}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=5l\vec{a}+(3l-1)\vec{b}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|=\sqrt{10}$ より, $|5l\vec{a}+(3l-1)\vec{b}|^2=10$

$$25l^2|\vec{a}|^2+10l(3l-1)\vec{a}\cdot\vec{b}+(3l-1)^2|\vec{b}|^2=10$$

ここで, $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot5\cdot\dfrac{3}{5}=9$ より,

$$225l^2+90l(3l-1)+25(3l-1)^2=10,\quad 48l^2-16l+1=0$$

$(12l-1)(4l-1)=0$ より, $l=\dfrac{1}{12}$, $\dfrac{1}{4}$

よって, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{12}(5\vec{a}+3\vec{b})=\dfrac{5}{12}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{4}(5\vec{a}+3\vec{b})=\dfrac{5}{4}\vec{a}+\dfrac{3}{4}\vec{b}$

［解 説］

ひし形の対角線が内角を二等分するという有名な見方で立式しています。なお, $\triangle$OAB は直角三角形ですが, この特質は利用していません。

$\boxed{4}$

問題のページへ

2 次方程式$x^2+(3-2c)x+c^2+5=0$……①の解をα，βとするとき，実数c^2，α，βが三角形の頂点になることより，①は虚数解をもつ。

$$D=(3-2c)^2-4(c^2+5)<0,\ -12c-11<0,\ c>-\frac{11}{12}\ \cdots\cdots\cdots②$$

このとき，①の解がα，βより，$\alpha+\beta=2c-3$………③

さて，3 点α，β，c^2を頂点とする三角形の重心は 0 なので，

$$\frac{\alpha+\beta+c^2}{3}=0,\ \alpha+\beta+c^2=0$$

③より$2c-3+c^2=0$，$(c+3)(c-1)=0$であり，②から$c=1$となる。

このとき，①は$x^2+x+6=0$となり，解は$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{23}i}{2}$である。

よって，3 点α，β，c^2は同一直線上にないので，$c=1$である。

［解 説］

①の$D<0$だけでは，3 点がタテに並ぶケースが排除できないので，①の解を具体的に求めました。

5

問題のページへ

(1)　$a^2+b^2=2^n$ ……①に対して，$n \geqq 2$ のとき 2^n は 4 以上の偶数なので，a^2，b^2 はともに偶数か，またはともに奇数である。

よって，a, b はともに偶数であるか，またはともに奇数である。

ここで，a，b がともに奇数であると仮定する。すなわち，k，l を自然数として，$a=2k-1$，$b=2l-1$ とおくと，

$$a^2+b^2=(2k-1)^2+(2l-1)^2=2\{2k(k-1)+2l(l-1)+1\}$$

①より，$2k(k-1)+2l(l-1)+1=2^{n-1}$ ………②

②は左辺が奇数，また $n \geqq 2$ より右辺が偶数となり，成立しない。よって，a，b がともに奇数という場合はない。

以上より，$n \geqq 2$ で①が成立するとき，a, b はともに偶数である。

(2)　(i)　$n=0$ のとき　①より $a^2+b^2=1$ なので，$(a,\ b)=(1,\ 0),\ (0,\ 1)$

(ii)　$n=1$ のとき　①より $a^2+b^2=2$ なので，$(a,\ b)=(1,\ 1)$

(iii) $n \geqq 2$ のとき　(1)より a, b はともに偶数である。

そこで，a_1，b_1 を 0 以上の整数として，$a=2a_1$，$b=2b_1$ とおくと，①より，

$$4{a_1}^2+4{b_1}^2=2^n,\quad {a_1}^2+{b_1}^2=2^{n-2}$$

$n-2 \geqq 2$ のときは，a_2，b_2 を 0 以上の整数として，$a_1=2a_2$，$b_1=2b_2$ とおき，

$$4{a_2}^2+4{b_2}^2=2^{n-2},\quad {a_2}^2+{b_2}^2=2^{n-4}$$

この操作をくり返すと考え，n が偶数のときと奇数のときに場合分けをする。

(iii-i)　$n=2m\ (m \geqq 1)$ のとき　①より $a^2+b^2=2^{2m}$ なので，

$$ {a_1}^2+{b_1}^2=2^{2(m-1)},\quad {a_2}^2+{b_2}^2=2^{2(m-2)},\quad \cdots\cdots,\quad {a_m}^2+{b_m}^2=2^{2(m-m)}=1$$

(i)より，$(a_m,\ b_m)=(1,\ 0),\ (0,\ 1)$

よって，$(a,\ b)=(2^m,\ 0),\ (0,\ 2^m)=\left(2^{\frac{n}{2}},\ 0\right),\ \left(0,\ 2^{\frac{n}{2}}\right)$

(iii-ii)　$n=2m+1\ (m \geqq 1)$ のとき　①より $a^2+b^2=2^{2m+1}$ なので，

$$ {a_1}^2+{b_1}^2=2^{2(m-1)+1},\quad {a_2}^2+{b_2}^2=2^{2(m-2)+1},\quad \cdots\cdots,\quad {a_m}^2+{b_m}^2=2^{2(m-m)+1}=2$$

(ii)より，$(a_m,\ b_m)=(1,\ 1)$

よって，$(a,\ b)=(2^m,\ 2^m)=\left(2^{\frac{n-1}{2}},\ 2^{\frac{n-1}{2}}\right)$

以上まとめると，n が偶数のとき $(a,\ b)=\left(2^{\frac{n}{2}},\ 0\right),\ \left(0,\ 2^{\frac{n}{2}}\right)$，$n$ が奇数のとき $(a,\ b)=\left(2^{\frac{n-1}{2}},\ 2^{\frac{n-1}{2}}\right)$ である。

[解 説]

最後はやっと京大らしい整数問題です。(2)で，(1)の誘導が役に立ちます。