1

解答解説のページへ

$f(\theta)=\cos 4\theta-4\sin^2\theta$ とする。$0\leqq\theta\leqq\dfrac{3\pi}{4}$ における $f(\theta)$ の最大値および最小値を求めよ。

2

解答解説のページへ

$\alpha>0$ とし，$x>0$ で定義された関数 $f(x)=\left(\dfrac{e}{x^{\alpha}}-1\right)\dfrac{\log x}{x}$ を考える。$y=f(x)$ のグラフより下側で x 軸より上側の部分の面積を α で表せ。ただし，e は自然対数の底である。

3

解答解説のページへ

n を 2 以上の自然数とする。x^{2n} を $x^2-x+\dfrac{n-1}{n^2}$ で割った余りを a_nx+b_n とする。すなわち，x の多項式 $P_n(x)$ があって

$$x^{2n}=P_n(x)\left(x^2-x+\frac{n-1}{n^2}\right)+a_nx+b_n$$

が成り立っているとする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n$ を求めよ。

4

解答解説のページへ

行列 A, B を $A=\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{pmatrix}$ とする。次の(＊)が成り立つための実数 α , β についての必要十分条件を求めよ。

(＊)　どんな 2 次正方行列 Y に対しても, 2 次正方行列 X で $AX-XB=Y$ となるものがある。

5

解答解説のページへ

複素数αに対してその共役複素数を$\overline{\alpha}$で表す。αを実数ではない複素数とする。複素平面内の円Cが1, -1, αを通るならば, Cは$-\dfrac{1}{\overline{\alpha}}$も通ることを示せ。

6

解答解説のページへ

N を自然数とする。$N+1$ 個の箱があり，1 から $N+1$ までの番号が付いている。どの箱にも玉が 1 個入っている。番号 1 から N までの箱に入っている玉は白玉で，番号 $N+1$ の箱に入っている玉は赤玉である。次の操作(＊)を，各々の $k=1,\ 2,\ \cdots,\ N+1$ に対して，k が小さい方から順番に 1 回ずつ行う。

(＊)　k 以外の番号の N 個の箱から 1 個の箱を選び，その箱の中身と番号 k の箱の中身を交換する。（ただし，N 個の箱から 1 個の箱を選ぶ事象は，どれも同様に確からしいとする。）

操作がすべて終了した後，赤玉が番号 $N+1$ の箱に入っている確率を求めよ。

1

問題のページへ

$f(\theta)=\cos 4\theta-4\sin^2\theta=\cos 4\theta-4\cdot\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}=\cos 4\theta+2\cos 2\theta-2$ より，

$$f'(\theta)=-4\sin 4\theta-4\sin 2\theta=-4\cdot 2\sin\frac{6\theta}{2}\cos\frac{2\theta}{2}=-8\sin 3\theta\cos\theta$$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{3\pi}{4}$ において増減表をつくると，右表のようになる。

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{2\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{3\pi}{4}$
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(\theta)$	1	$\searrow$	$-\frac{7}{2}$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\frac{7}{2}$	$\nearrow$	-3

したがって，最大値は $f(0)=1$，最小値は $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=-\dfrac{7}{2}$ である。

［解 説］

微分法を用いて普通に解きました。角を 2θ に統一して平方完成を行っても OK です。穏やかな基本題です。

2

問題のページへ

$f(x)=\left(\dfrac{e}{x^{\alpha}}-1\right)\dfrac{\log x}{x}$ に対して，$f(x)\geqq 0$ とすると，

$$\frac{(e-x^{\alpha})\log x}{x^{\alpha+1}}\geqq 0,\ (e-x^{\alpha})\log x\geqq 0$$

(i)　$e\geqq x^{\alpha}$ かつ $\log x\geqq 0$ のとき

$x\leqq e^{\frac{1}{\alpha}}$ かつ $x\geqq 1$ となり，$e^{\frac{1}{\alpha}}>1$ から，$1\leqq x\leqq e^{\frac{1}{\alpha}}$

(ii)　$e\leqq x^{\alpha}$ かつ $\log x\leqq 0$ のとき

$x\geqq e^{\frac{1}{\alpha}}$ かつ $0<x\leqq 1$ となり，$e^{\frac{1}{\alpha}}>1$ から，共通範囲は存在しない。

これより，求める面積を S とすると，

$$S=\int_1^{e^{\frac{1}{\alpha}}}\left(\frac{e}{x^{\alpha}}-1\right)\frac{\log x}{x}dx$$

ここで，$\log x=t$ とおくと $x=e^t$ で，$x=1\to e^{\frac{1}{\alpha}}$ のとき $t=0\to\dfrac{1}{\alpha}$ となり，

$$S=\int_0^{\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{e}{e^{\alpha t}}-1\right)t\,dt=\int_0^{\frac{1}{\alpha}}(e^{1-\alpha t}-1)t\,dt=\int_0^{\frac{1}{\alpha}}te^{1-\alpha t}dt-\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$=\left[-\frac{1}{\alpha}te^{1-\alpha t}\right]_0^{\frac{1}{\alpha}}+\frac{1}{\alpha}\int_0^{\frac{1}{\alpha}}e^{1-\alpha t}dt-\frac{1}{2\alpha^2}=-\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\alpha^2}\left[e^{1-\alpha t}\right]_0^{\frac{1}{\alpha}}-\frac{1}{2\alpha^2}$$

$$=-\frac{3}{2\alpha^2}-\frac{1}{\alpha^2}(1-e)=\frac{1}{\alpha^2}\left(e-\frac{5}{2}\right)$$

［解 説］

微分して増減表を作り，グラフの概形を書いて面積計算をするのが手順です。しかし，微分の計算が複雑になったため，この作業を止め，必要な情報だけ抽出して計算したのが上の解です。

3

問題のページへ

$x^2-x+\dfrac{n-1}{n^2}=\left(x-\dfrac{1}{n}\right)\left(x-\dfrac{n-1}{n}\right)$より,

$$x^{2n}=P_n(x)\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{n-1}{n}\right)+a_nx+b_n\cdots\cdots\cdots①$$

①に$x=\dfrac{1}{n}$を代入すると,

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{2n}=\frac{1}{n}a_n+b_n,\ \frac{1}{n}a_n+b_n=\left(\frac{1}{n}\right)^{2n}\cdots\cdots\cdots②$$

①に$x=\dfrac{n-1}{n}$を代入すると,

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2n}=\frac{n-1}{n}a_n+b_n,\ \left(1-\frac{1}{n}\right)a_n+b_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}\cdots\cdots\cdots③$$

②③より, $\left(1-\dfrac{2}{n}\right)a_n=\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{2n}-\left(\dfrac{1}{n}\right)^{2n}$

$n\geqq3$において,

$$a_n=\frac{1}{1-\frac{2}{n}}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}-\left(\frac{1}{n}\right)^{2n}\right\}=\frac{1}{1-\frac{2}{n}}\left[\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right\}^{-2}-\frac{1}{n^{2n}}\right]$$

$n\to\infty$のとき, $1-\dfrac{2}{n}\to1$, $\left\{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{-n}\right\}^{-2}\to e^{-2}$, $\dfrac{1}{n^{2n}}\to0$なので,

$$\lim_{n\to\infty}a_n=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$$

②より, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^{2n}}-\frac{1}{n}a_n\right)=0$

［解 説］

剰余の定理と数列の極限を融合させた基本問題です。2 次式$x^2-x+\dfrac{n-1}{n^2}$が因数分解できるので, 難しくはありません。

4

問題のページへ

$X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$Y=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$とおくと，$AX-XB=Y$より，

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

これより，$2a-\alpha a=x$………①，$2b-\beta b=y$………②

$a+c-\alpha c=z$………③，$b+d-\beta d=w$………④

題意より，任意の x, y, z, w に対して，①～④を満たす a, b, c, d が存在する条件を求める。

①より，$(2-\alpha)a=x$ となるが，$\alpha=2$ のとき，任意の x に対して成立しないので，$\alpha\neq 2$ である。

このとき，$a=\dfrac{x}{2-\alpha}$ となる。

②より，$(2-\beta)b=y$ となるが，$\beta=2$ のとき，任意の y に対して成立しないので，$\beta\neq 2$ である。

このとき，$b=\dfrac{y}{2-\beta}$ となる。

③より，$(1-\alpha)c=z-a$ となるが，$\alpha=1$ のとき，任意の z に対して成立しないので，$\alpha\neq 1$ である。

このとき，$c=\dfrac{z}{1-\alpha}-\dfrac{a}{1-\alpha}=\dfrac{z}{1-\alpha}-\dfrac{x}{(1-\alpha)(2-\alpha)}$ となる。

④より，$(1-\beta)d=w-b$ となるが，$\beta=1$ のとき，任意の w に対して成立しないので，$\beta\neq 1$ である。

このとき，$d=\dfrac{w}{1-\beta}-\dfrac{b}{1-\beta}=\dfrac{w}{1-\beta}-\dfrac{y}{(1-\beta)(2-\beta)}$ となる。

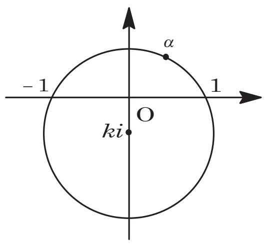
以上より，求める条件は，$\alpha\neq 1$ かつ $\alpha\neq 2$ かつ $\beta\neq 1$ かつ $\beta\neq 2$ である。

［解　説］

初めは対角行列の性質が関係するのかとも思いましたが，いったん成分計算をすると，連立方程式の解の存在条件を求めることに等しいことがわかりました。

$\boxed{5}$

問題のページへ



円の中心は，2 点1，-1を結ぶ線分の垂直二等分線，すなわち虚軸上にあるので，中心を表す複素数をki（k は実数）とおくことができる。

すると，円の半径は$|ki-1|=\sqrt{1+k^2}$となる。

条件より，$|\alpha-ki|=\sqrt{1+k^2}$，$(\alpha-ki)(\overline{\alpha}+ki)=1+k^2$

$$\alpha\overline{\alpha}+k\alpha i-k\overline{\alpha}i=1\cdots\cdots\cdots(*)$$

さて，$\left|-\dfrac{1}{\overline{\alpha}}-ki\right|^2=\left|\dfrac{1}{\overline{\alpha}}+ki\right|^2=\dfrac{|1+k\overline{\alpha}i|^2}{|\overline{\alpha}|^2}=\dfrac{(1+k\overline{\alpha}i)(1-k\alpha i)}{\alpha\overline{\alpha}}$

$$=\frac{1-k\alpha i+k\overline{\alpha}i+k^2\alpha\overline{\alpha}}{\alpha\overline{\alpha}}$$

$(*)$より，$\left|-\dfrac{1}{\overline{\alpha}}-ki\right|^2=\dfrac{(1+k^2)\alpha\overline{\alpha}}{\alpha\overline{\alpha}}$，$\left|-\dfrac{1}{\overline{\alpha}}-ki\right|=\sqrt{1+k^2}$

よって，点$-\dfrac{1}{\overline{\alpha}}$は，3 点1，$-1$，$\alpha$を通る円周上にある。

［解　説］

同一円周上にある条件を，距離を用いて示そうか，それとも角を用いて示そうかと迷いました。後者の方法は角の向きの処理が面倒そうだったので，前者の立場で解きました。

6

問題のページへ

操作がすべて終了した後，赤玉が番号 $N+1$ の箱に入っている場合は，第 N 回の操作が終わったとき，赤玉が番号 1 から N のいずれかの箱に入っており，第 $N+1$ 回目の操作で，その赤玉の入っている番号の箱を選び，番号 $N+1$ の箱に入っている白玉と交換する場合に限られる。

まず，第 N 回の操作が終わったとき，赤玉が番号 $N+1$ の箱に入っているのは，1 回から N 回までの操作で，番号 $N+1$ の箱に入っている赤玉とそれ以外の箱に入っている白玉との交換が一度もない場合だけで，その確率は $\left(\dfrac{N-1}{N}\right)^N$ である。

これより，1 回から N 回までの操作で，少なくとも 1 回，番号 $N+1$ の箱を選んで，番号 $k\,(1 \leqq k \leqq N)$ の箱に入っている白玉と交換し，第 N 回の操作が終わったとき，白玉が番号 $N+1$ の箱に入っている確率は，$1-\left(\dfrac{N-1}{N}\right)^N$ となる。

さらに，$N+1$ 回目の操作で，番号 1 から N までの箱のいずれかに入っている赤玉を選び，番号 $N+1$ の箱にある白玉と交換する確率は，$\dfrac{1}{N}$ である。

以上より，操作がすべて終了した後，赤玉が番号 $N+1$ の箱に入っている確率は，$\left\{1-\left(\dfrac{N-1}{N}\right)^N\right\}\cdot\dfrac{1}{N}$ となる。

［解 説］

赤玉が第 $k\,(1 \leqq k \leqq N)$ 回目の操作で，番号 $N+1$ の箱からいったん出たら，最後の第 $N+1$ 回目の操作まで，番号 $N+1$ の箱に戻る可能性はありません。この点に気付くことがポイントです。実験すると，わかります。