1

解答解説のページへ

xy 平面上の原点と点 $(1,\ 2)$ を結ぶ線分（両端を含む）を L とする。曲線 $y=x^2+ax+b$ が L と共有点をもつような実数の組 $(a,\ b)$ の集合を ab 平面上に図示せよ。

2

解答解説のページへ

$2^{10} < \left(\dfrac{5}{4}\right)^n < 2^{20}$ を満たす自然数 n は何個あるか。ただし $0.301 < \log_{10} 2 < 0.3011$ である。

3

解答解説のページへ

α，β は 0 でない相異なる複素数で，$\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}=2$ を満たすとする。このとき，0，α，β の表す複素平面上の 3 点を結んで得られる三角形はどのような三角形か。（ただし，複素数 z に対し，$\overline{z}$ は z に共役な複素数である。また，複素平面を複素数平面ともいう。）

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

$a^3 - b^3 = 65$ を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。

5

解答解説のページへ

1 から n までの番号のついた n 枚の札が袋に入っている。ただし，$n \geqq 3$ とし，同じ番号の札はないとする。この袋から 3 枚の札を取り出して，札の番号を大きさの順に並べるとき，等差数列になっている確率を求めよ。

1　　問題のページへ

原点と点$(1,\ 2)$を結ぶ線分Lは，$y=2x\ (0\leqq x\leqq 1)$………①

①と曲線$y=x^2+ax+b$……②の共有点は,

$$x^2+ax+b=2x,\ x^2+(a-2)x+b=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

すると，①②が共有点をもつ条件は，③が$0\leqq x\leqq 1$に少なくとも 1 つの実数解をもつことであり，さらに$f(x)=x^2+(a-2)x+b$……④とおくと，この条件は，放物線$y=f(x)$とx軸が$0\leqq x\leqq 1$に少なくとも 1 つの共有点をもつことと言い換えることができる。

④より，$f(x)=\left(x+\dfrac{a-2}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}(a-2)^2+b$となり，放物線の軸の位置で場合分けをして，$(a,\ b)$の条件を求めると,

(i)　$-\dfrac{a-2}{2}<0\ (a>2)$のとき

$f(0)=b\leqq 0$かつ$f(1)=a+b-1\geqq 0$より，$-a+1\leqq b\leqq 0$

(ii)　$0\leqq -\dfrac{a-2}{2}\leqq 1\ (0\leqq a\leqq 2)$のとき

$-\dfrac{1}{4}(a-2)^2+b\leqq 0$　かつ（$f(0)=b\geqq 0$または$f(1)=a+b-1\geqq 0$）

よって，$b\leqq\dfrac{1}{4}(a-2)^2$かつ（$b\geqq 0$または$b\geqq -a+1$）

(iii)　$-\dfrac{a-2}{2}>1\ (a<0)$のとき

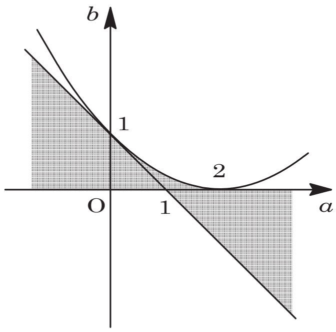
$f(0)=b\geqq 0$かつ$f(1)=a+b-1\leqq 0$より,

$$0\leqq b\leqq -a+1$$

さて，$b=\dfrac{1}{4}(a-2)^2$と$b=-a+1$の共有点は,

$$\frac{1}{4}(a-2)^2=-a+1,\ a=0$$

以上より，$(a,\ b)$の存在領域は，右図の網点部である。ただし，境界は領域に含む。



［解 説］

頻出問題なので，方針はすぐに決まります。ミスをしないように，ていねいに計算を進めていきます。

2

問題のページへ

$2^{10}<\left(\dfrac{5}{4}\right)^n<2^{20}$ より，$10\log_{10}2<n(\log_{10}5-\log_{10}4)<20\log_{10}2$

$$10\log_{10}2<n(1-3\log_{10}2)<20\log_{10}2$$

$1-3\log_{10}2>0$ より，

$$\frac{10\log_{10}2}{1-3\log_{10}2}<n<\frac{20\log_{10}2}{1-3\log_{10}2}\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$f(x)=\dfrac{x}{1-3x}$，$a=\log_{10}2$ とおくと，①より，

$$10f(a)<n<20f(a)\cdots\cdots\cdots②$$

さて，$f(x)=-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3(1-3x)}$ と変形し，条件から $0.301<a<0.3011$ なので，

$$-\frac{1}{3}+\frac{1}{3(1-0.903)}<f(a)<-\frac{1}{3}+\frac{1}{3(1-0.9033)}$$

これより，$3.103<f(a)<3.114$ となり，

$$31.03<10f(a)<31.14,\quad 62.06<20f(a)<62.28$$

②より，n は自然数なので，$32\leqq n\leqq 62$ となり，n の個数は 31 である。

［解 説］

数値計算が面倒そうなので，後回しにしたくなる問題です。しかし，その予想は，はずれてしまいました。

3

問題のページへ

$z=\dfrac{\alpha}{\beta}$ とおくと，$\dfrac{\alpha}{\beta}+\overline{\dfrac{\alpha}{\beta}}=2$ より，$z+\overline{z}=2$，$\dfrac{z+\overline{z}}{2}=1$

これより, z の実部は 1 となり，$z=1+ki$（k は実数）から,

$$\frac{\alpha}{\beta}=1+ki$$

ここで，$\alpha\neq\beta$ より，$k\neq 0$ であり,

$$\frac{\alpha}{\beta}-1=ki,\ \ \frac{\alpha-\beta}{0-\beta}=-ki$$

すると，$\arg\dfrac{\alpha-\beta}{0-\beta}=\pm 90^\circ$ から，$\triangle 0\alpha\beta$ は $\angle\beta=90^\circ$ の直角三角形となる。

［解 説］

複素数平面上の図形を題材にした基本問題です。これから，しばらく（永久？）大学入試から消えてしまう問題です。

4

問題のページへ

$a^3-b^3=65$ より，$(a-b)(a^2+ab+b^2)=65$

ここで, a, b は整数なので，$a-b$，a^2+ab+b^2 はともに整数である。

さらに，$a^2+ab+b^2=\left(a+\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2 \geqq 0$ より，$a-b$，a^2+ab+b^2 は $65=5\times13$ の正の約数となる。

(i)　$a-b=1$，$a^2+ab+b^2=65$ のとき

$a=b+1$ より，$(b+1)^2+(b+1)b+b^2=65$ から,

$$3b^2+3b=64$$

左辺は 3 の倍数, 右辺は 3 の倍数でないことより，成立しない。

(ii)　$a-b=5$，$a^2+ab+b^2=13$ のとき

$a=b+5$ より，$(b+5)^2+(b+5)b+b^2=13$ から,

$$b^2+5b+4=0$$

これより，$b=-1,\ -4$ となり，$(a,\ b)=(4,\ -1),\ (1,\ -4)$

(iii)　$a-b=13$，$a^2+ab+b^2=5$ のとき

$a=b+13$ より，$(b+13)^2+(b+13)b+b^2=5$ から,

$$3b^2+39b=-164$$

左辺は 3 の倍数, 右辺は 3 の倍数でないことより，成立しない。

(iv)　$a-b=65$，$a^2+ab+b^2=1$ のとき

$a=b+65$ より，$(b+65)^2+(b+65)b+b^2=1$ から,

$$b^2+65b+1408=0$$

すると，$D=65^2-4\times1408=-1407<0$ から, b は虚数となり不適。

(i)～(iv)より，$(a,\ b)=(4,\ -1),\ (1,\ -4)$

［解 説］

毎年出題の整数問題です。今年はややパンチに欠けており，正確な計算だけで結論まで導けます。

5

問題のページへ

n 枚の札から 3 枚を取り出す場合の数は,

$${}_n\mathrm{C}_3=\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$$

ここで, 取り出した札の番号を, 小さい方から a, b, c とすると,

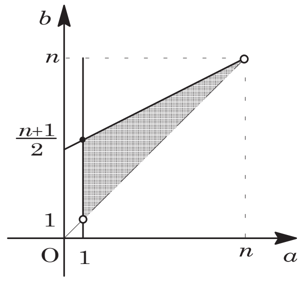
$$1\leqq a<b<c\leqq n\cdots\cdots\text{①}$$

条件より, a, b, c が等差数列をなすので, $2b=a+c\cdots\cdots$②

①②より, $1\leqq a<b<2b-a\leqq n\cdots\cdots$③

③より, $1\leqq a<b$ かつ $2b-n\leqq a$

ab 平面上で, $a=1$ と $a=2b-n$ の交点は, $\left(1,\ \dfrac{n+1}{2}\right)$ となり, ③の表す領域を図示すると, 右図の網点部となる。ただし, 実線の境界は領域に含み, 破線の境界は含まない。



これから, a, b, c が等差数列となる場合の数は, この網点部の格子点の個数として数えることができる。

さて, $b=k\ (1\leqq k\leqq n)$ と固定し, $\dfrac{n+1}{2}$ が整数がどうか, すなわち n を偶奇に分けて, その線分上の格子点の個数を数える。

(i)　n が奇数のとき

$\dfrac{n+1}{2}$ は整数となるので, $b=k$ 上の格子点は, $1\leqq k\leqq\dfrac{n+1}{2}$ のとき $k-1$ 個, $\dfrac{n+3}{2}\leqq k\leqq n$ のとき $k-(2k-n)=n-k$ 個ある。これより, 格子点の総数は,

$$\sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}}(k-1)+\sum_{k=\frac{n+3}{2}}^{n}(n-k)=\frac{1}{2}\left(0+\frac{n-1}{2}\right)\frac{n+1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{n-3}{2}+0\right)\left(n-\frac{n+3}{2}+1\right)$$

$$=\frac{1}{8}(n^2-1)+\frac{1}{8}(n^2-4n+3)=\frac{1}{4}(n-1)^2$$

したがって, 札の番号が等差数列となる確率は,

$$\frac{\frac{1}{4}(n-1)^2}{\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)}=\frac{3(n-1)}{2n(n-2)}$$

(ii)　n が偶数のとき

$\dfrac{n+1}{2}$ は整数でないので, $b=k$ 上の格子点は, $1\leqq k\leqq\dfrac{n}{2}$ のとき $k-1$ 個, $\dfrac{n+2}{2}\leqq k\leqq n$ のとき $k-(2k-n)=n-k$ 個ある。これより, 格子点の総数は,

$$\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}(k-1)+\sum_{k=\frac{n+2}{2}}^{n}(n-k)=\frac{1}{2}\left(0+\frac{n-2}{2}\right)\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{n-2}{2}+0\right)\left(n-\frac{n+2}{2}+1\right)$$

$$=\frac{1}{8}(n^2-2n)+\frac{1}{8}(n^2-2n)=\frac{1}{4}n(n-2)$$

したがって，札の番号が等差数列となる確率は，

$$\frac{\frac{1}{4}n(n-2)}{\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)}=\frac{3}{2(n-1)}$$

［解 説］

いろいろな考え方ができますが，1 文字を固定し，格子点の個数を対応させて場合の数を数えるという最初に考えた解法で記述しました。なお，後半のシグマ計算は，等差数列の和として公式を適用しています。