

**1**

解答解説のページへ

$xy$  平面上の原点と点  $(1, 2)$  を結ぶ線分 (両端を含む) を  $L$  とする。曲線  $y = x^2 + ax + b$  が  $L$  と共有点をもつような実数の組  $(a, b)$  の集合を  $ab$  平面上に図示せよ。

**2**

解答解説のページへ

$2^{10} < \left(\frac{5}{4}\right)^n < 2^{20}$  を満たす自然数  $n$  は何個あるか。ただし  $0.301 < \log_{10} 2 < 0.3011$  である。

**3**

解答解説のページへ

$\alpha, \beta, \gamma$  は相異なる複素数で、

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$$

を満たすとする。このとき、 $\alpha, \beta, \gamma$  の表す複素平面上の 3 点を結んで得られる三角形はどのような三角形か。（ただし、複素平面を複素数平面ともいう。）

**4**

解答解説のページへ

$a^3 - b^3 = 217$  を満たす整数の組  $(a, b)$  をすべて求めよ。

**5**

解答解説のページへ

 $k$  を正の整数とし、 $2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi$  の範囲で定義された 2 曲線

$$C_1 : y = \cos x, \quad C_2 : y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

を考える。

- (1)  $C_1$  と  $C_2$  は共有点をもつことを示し、その点における  $C_1$  の接線は点  $(0, 1)$  を通ることを示せ。
- (2)  $C_1$  と  $C_2$  の共有点はただ 1 つであることを証明せよ。

**6**

解答解説のページへ

先頭車両から順に 1 から  $n$  までの番号のついた  $n$  両編成の列車がある。ただし  $n \geq 2$  とする。各車両を赤色, 青色, 黄色のいずれか 1 色で塗るとき, 隣り合った車両の少なくとも一方が赤色となるような色の塗り方は何通りか。

1

問題のページへ

原点と点(1, 2)を結ぶ線分  $L$  は,  $y = 2x$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) ……①

①と曲線  $y = x^2 + ax + b$  ……②の共有点は,

$$x^2 + ax + b = 2x, \quad x^2 + (a-2)x + b = 0 \dots\dots\dots③$$

すると, ①②が共有点をもつ条件は, ③が  $0 \leq x \leq 1$  に少なくとも 1 つの実数解をもつことであり, さらに  $f(x) = x^2 + (a-2)x + b$  ……④とおくと, この条件は, 放物線  $y = f(x)$  と  $x$  軸が  $0 \leq x \leq 1$  に少なくとも 1 つの共有点をもつことと言い換えることができる。

④より,  $f(x) = \left(x + \frac{a-2}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(a-2)^2 + b$  となり, 放物線の軸の位置で場合分けをして,  $(a, b)$  の条件を求めると,

(i)  $-\frac{a-2}{2} < 0$  ( $a > 2$ ) のとき

$$f(0) = b \leq 0 \text{ かつ } f(1) = a + b - 1 \geq 0 \text{ より, } -a + 1 \leq b \leq 0$$

(ii)  $0 \leq -\frac{a-2}{2} \leq 1$  ( $0 \leq a \leq 2$ ) のとき

$$-\frac{1}{4}(a-2)^2 + b \leq 0 \text{ かつ } (f(0) = b \geq 0 \text{ または } f(1) = a + b - 1 \geq 0)$$

$$\text{よって, } b \leq \frac{1}{4}(a-2)^2 \text{ かつ } (b \geq 0 \text{ または } b \geq -a + 1)$$

(iii)  $-\frac{a-2}{2} > 1$  ( $a < 0$ ) のとき

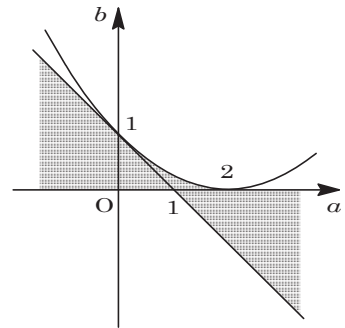
$$f(0) = b \geq 0 \text{ かつ } f(1) = a + b - 1 \leq 0 \text{ より,}$$

$$0 \leq b \leq -a + 1$$

さて,  $b = \frac{1}{4}(a-2)^2$  と  $b = -a + 1$  の共有点は,

$$\frac{1}{4}(a-2)^2 = -a + 1, \quad a = 0$$

以上より,  $(a, b)$  の存在領域は, 右図の網点部である。  
ただし, 境界は領域に含む。



**[解説]**

頻出問題なので, 方針はすぐに決まります。ミスをしないように, ていねいに計算を進めていきます。

2

問題のページへ

$$2^{10} < \left(\frac{5}{4}\right)^n < 2^{20} \text{ より, } 10 \log_{10} 2 < n(\log_{10} 5 - \log_{10} 4) < 20 \log_{10} 2$$

$$10 \log_{10} 2 < n(1 - 3 \log_{10} 2) < 20 \log_{10} 2$$

$$1 - 3 \log_{10} 2 > 0 \text{ より,}$$

$$\frac{10 \log_{10} 2}{1 - 3 \log_{10} 2} < n < \frac{20 \log_{10} 2}{1 - 3 \log_{10} 2} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{ここで, } f(x) = \frac{x}{1-3x}, \quad a = \log_{10} 2 \text{ とおくと, } \textcircled{1} \text{ より,}$$

$$10 f(a) < n < 20 f(a) \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$$\text{さて, } f(x) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3(1-3x)} \text{ と変形し, 条件から } 0.301 < a < 0.3011 \text{ なので,}$$

$$-\frac{1}{3} + \frac{1}{3(1-0.903)} < f(a) < -\frac{1}{3} + \frac{1}{3(1-0.9033)}$$

$$\text{これより, } 3.103 < f(a) < 3.114 \text{ となり,}$$

$$31.03 < 10 f(a) < 31.14, \quad 62.06 < 20 f(a) < 62.28$$

$\textcircled{2}$ より,  $n$  は自然数なので,  $32 \leq n \leq 62$  となり,  $n$  の個数は 31 である。

### [解説]

数値計算が面倒そうなので, 後回しにしたくなる問題です。しかし, その予想は, はずれてしまいました。



**3**

問題のページへ

条件より,  $\alpha + \beta + \gamma = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$ ,  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$ より,  $\gamma = -\alpha - \beta \cdots \cdots \textcircled{3}$ となり,  $\textcircled{2}$ に代入すると,

$$\alpha^2 + \beta^2 + (-\alpha - \beta)^2 = 0, \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 0 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$\alpha = 0$ とすると,  $\textcircled{4}$ より  $\beta = 0$ となり,  $\alpha \neq \beta$ に反する。

よって,  $\alpha \neq 0$ から,  $\textcircled{4}$ より,  $1 + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} = 0$ となり,

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \cos(\pm 120^\circ) + i \sin(\pm 120^\circ) \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$\textcircled{3}$ から, 以下, 複号同順で,

$$\frac{\gamma}{\alpha} = -1 - \frac{\beta}{\alpha} = -1 - \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \frac{-1 \mp \sqrt{3}i}{2} = \cos(\mp 120^\circ) + i \sin(\mp 120^\circ)$$

これより, 点  $\beta$  は点  $\alpha$  を原点まわりに  $\pm 120^\circ$ , 点  $\gamma$  は点  $\alpha$  を原点まわりに  $\mp 120^\circ$  回転した点である。

したがって,  $\triangle \alpha\beta\gamma$  は重心が原点である正三角形である。

### [解説]

1 文字を消去して普通に解きました。なお,  $\textcircled{1}$ 式から  $\triangle \alpha\beta\gamma$  の重心が原点であることがわかります。

4

問題のページへ

$$a^3 - b^3 = 217 \text{ より, } (a-b)(a^2 + ab + b^2) = 217$$

ここで,  $a, b$  は整数なので,  $a-b$ ,  $a^2 + ab + b^2$  はともに整数である。

さらに,  $a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0$  より,  $a-b$ ,  $a^2 + ab + b^2$  はともに

217 = 7 × 31 の正の約数となる。

(i)  $a-b=1$ ,  $a^2 + ab + b^2 = 217$  のとき

$a=b+1$  より,  $(b+1)^2 + (b+1)b + b^2 = 217$  から,

$$b^2 + b - 72 = 0$$

これより,  $b=8$ ,  $-9$  となり,  $(a, b) = (9, 8)$ ,  $(-8, -9)$

(ii)  $a-b=7$ ,  $a^2 + ab + b^2 = 31$  のとき

$a=b+7$  より,  $(b+7)^2 + (b+7)b + b^2 = 31$  から,

$$b^2 + 7b + 6 = 0$$

これより,  $b=-1$ ,  $-6$  となり,  $(a, b) = (6, -1)$ ,  $(1, -6)$

(iii)  $a-b=31$ ,  $a^2 + ab + b^2 = 7$  のとき

$a=b+31$  より,  $(b+31)^2 + (b+31)b + b^2 = 7$  から,

$$b^2 + 31b + 318 = 0$$

すると,  $D = 31^2 - 4 \times 318 = -311 < 0$  から,  $b$  は虚数となり不適。

(iv)  $a-b=217$ ,  $a^2 + ab + b^2 = 1$  のとき

$a=b+217$  より,  $(b+217)^2 + (b+217)b + b^2 = 1$  から,

$$b^2 + 217b + 15696 = 0$$

すると,  $D = 217^2 - 4 \times 15696 = -15695 < 0$  から,  $b$  は虚数となり不適。

(i)~(iv)より,  $(a, b) = (9, 8)$ ,  $(-8, -9)$ ,  $(6, -1)$ ,  $(1, -6)$

### [解説]

正確な計算だけで結論まで導けます。なお, 217 を 65 に変更すると文系の問題になりますが, 内容は全く同じです。

5

問題のページへ

(1)  $C_1 : y = \cos x \cdots \cdots \textcircled{1}$ ,  $C_2 : y = \frac{1-x^2}{1+x^2} \cdots \cdots \textcircled{2}$ の共有点の条件は,  $\cos x = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

ここで,  $f(x) = \cos x - \frac{1-x^2}{1+x^2}$ とおくと,

$$f(2k\pi) = 1 - \frac{1-4k^2\pi^2}{1+4k^2\pi^2} = \frac{8k^2\pi^2}{1+4k^2\pi^2} > 0$$

$$f((2k+1)\pi) = -1 - \frac{1-(2k+1)^2\pi^2}{1+(2k+1)^2\pi^2} = \frac{-2}{1+(2k+1)^2\pi^2} < 0$$

これより,  $f(x) = 0$ は  $2k\pi < x < (2k+1)\pi$ に少なくとも 1 つの実数解をもつ。  
すなわち,  $C_1$ と  $C_2$ はこの区間に少なくとも 1 つの共有点をもつ。

この共有点を  $(\alpha, \cos \alpha)$ とすると,  $\textcircled{1}\textcircled{2}$ より,  $\cos \alpha = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2} \cdots \cdots \textcircled{3}$

さて, 点  $(\alpha, \cos \alpha)$ における  $C_1$ の接線は,  $\textcircled{1}$ より  $y' = -\sin x$ なので,

$$y - \cos \alpha = -\sin \alpha (x - \alpha) \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$x = 0$  のとき,  $y = \alpha \sin \alpha + \cos \alpha \cdots \cdots \textcircled{5}$

ここで,  $2k\pi < \alpha < (2k+1)\pi$ において  $\sin \alpha > 0$ より,  $\textcircled{3}$ から,

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2}} = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}$$

$\textcircled{5}$ から,  $y = \alpha \cdot \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} + \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2} = \frac{1+\alpha^2}{1+\alpha^2} = 1$ となり, 接線 $\textcircled{4}$ は点  $(0, 1)$ を通る。

(2) 点  $(0, 1)$ から  $C_1$ に引いた接線は, 接点を  $(t, \cos t)$ とすると,

$$y - \cos t = -\sin t (x - t) \quad (2k\pi < t < (2k+1)\pi)$$

$(0, 1)$ を通ることより,  $1 - \cos t = t \sin t$ ,  $t \sin t + \cos t - 1 = 0$

ここで,  $g(t) = t \sin t + \cos t - 1$ とおくと,

$$g'(t) = \sin t + t \cos t - \sin t = t \cos t$$

右表より,  $g(t) = 0$ となる  $t$  は,  $2k\pi < t < (2k+1)\pi$ にただ

1 つだけ存在し, 言い換えると, 点  $(0, 1)$ を通る接線の  $C_1$ 上の

$t$	$2k\pi$	...	$(2k + \frac{1}{2})\pi$	...	$(2k+1)\pi$
$g'(t)$		+	0	-	
$g(t)$	0	↗		↘	-2

接点は, 1 個だけしか存在しない。すなわち,  $C_1$ と  $C_2$ の共有点の個数は多くとも 1 つであり, (1)と合わせると, ただ 1 つとなる。

**[解説]**

(2)は(1)の後半で示した  $C_1$ と  $C_2$ の共有点における  $C_1$ の接線は, 必ず点  $(0, 1)$ を通るということを用いています。ややくどく記述しましたが。

6

問題のページへ

隣り合った車両の少なくとも一方が赤色となる条件を満たす塗り方のうち、 $n$  番目が赤色である塗り方を  $a_n$  通り、赤色以外である塗り方を  $b_n$  通りとする。

$n = 2$  のとき、条件を満たすのは、(赤, 赤), (赤, 青), (赤, 黄), (青, 赤), (黄, 赤) より、 $a_2 = 3$ ,  $b_2 = 2$  である。

さて、 $n+1$  番目が赤のときは  $n$  番目は任意の色であり、 $n+1$  番目が赤以外 (青または黄) のときは  $n$  番目は赤なので、

$$a_{n+1} = a_n + b_n \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad b_{n+1} = 2a_n \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} - \textcircled{2} \times k \text{ より, } a_{n+1} - kb_{n+1} &= (1-2k)a_n + b_n \\ &= (1-2k)\left(a_n - \frac{1}{2k-1}b_n\right) \end{aligned}$$

$$k = \frac{1}{2k-1} \text{ とすると, } 2k^2 - k - 1 = 0 \text{ より, } k = -\frac{1}{2}, 1$$

$$k = -\frac{1}{2} \text{ のとき, } a_{n+1} + \frac{1}{2}b_{n+1} = 2\left(a_n + \frac{1}{2}b_n\right)$$

$$a_n + \frac{1}{2}b_n = \left(a_2 + \frac{1}{2}b_2\right)2^{n-2} = (3+1)2^{n-2} = 2^n \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$k = 1 \text{ のとき, } a_{n+1} - b_{n+1} = -(a_n - b_n)$$

$$a_n - b_n = (a_2 - b_2)(-1)^{n-2} = (3-2)(-1)^{n-2} = (-1)^n \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}\textcircled{4} \text{ より, } \frac{3}{2}b_n = 2^n - (-1)^n, \quad b_n = \frac{1}{3} \cdot 2^{n+1} - \frac{2}{3}(-1)^n$$

$$a_n = b_n + (-1)^n = \frac{1}{3} \cdot 2^{n+1} - \frac{2}{3}(-1)^n + (-1)^n = \frac{1}{3} \cdot 2^{n+1} + \frac{1}{3}(-1)^n$$

よって、求める色の塗り方は、

$$a_n + b_n = \frac{2}{3} \cdot 2^{n+1} - \frac{1}{3}(-1)^n = \frac{1}{3} \{ 2^{n+2} - (-1)^n \}$$

### [解説]

ストレートには考えにくいので、漸化式を立てました。1 両目の車両の色で場合分けをして、隣接 3 項間型の漸化式を立てることもできますが、最初に考えた連立漸化式で記述しました。なお、漸化式の解法は「ピンポイントレクチャー」を参照してください。